



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

CENNI ALLA TEORIA DEI GRAFI

Definizioni ed applicazioni alla teoria dei circuiti

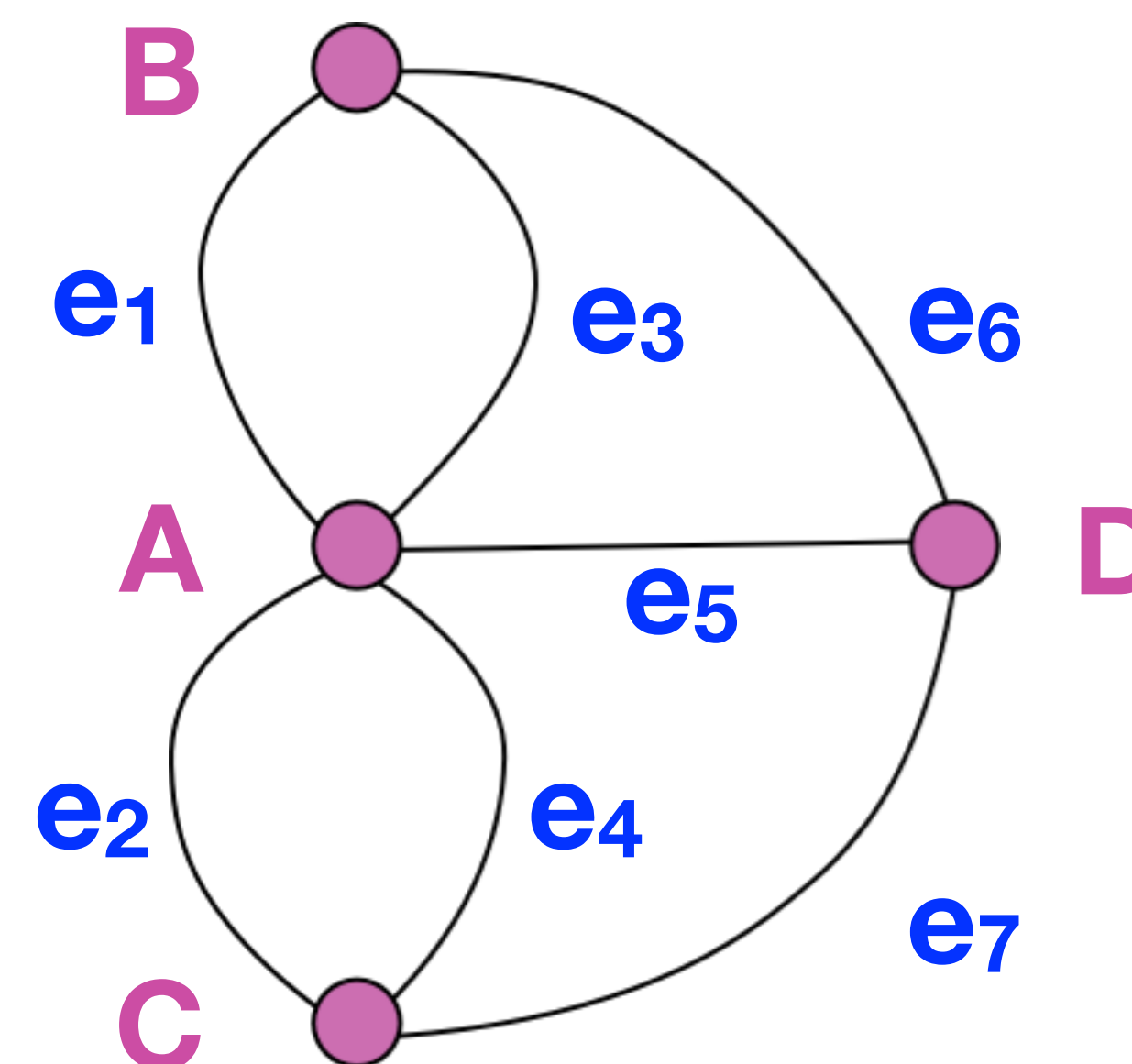
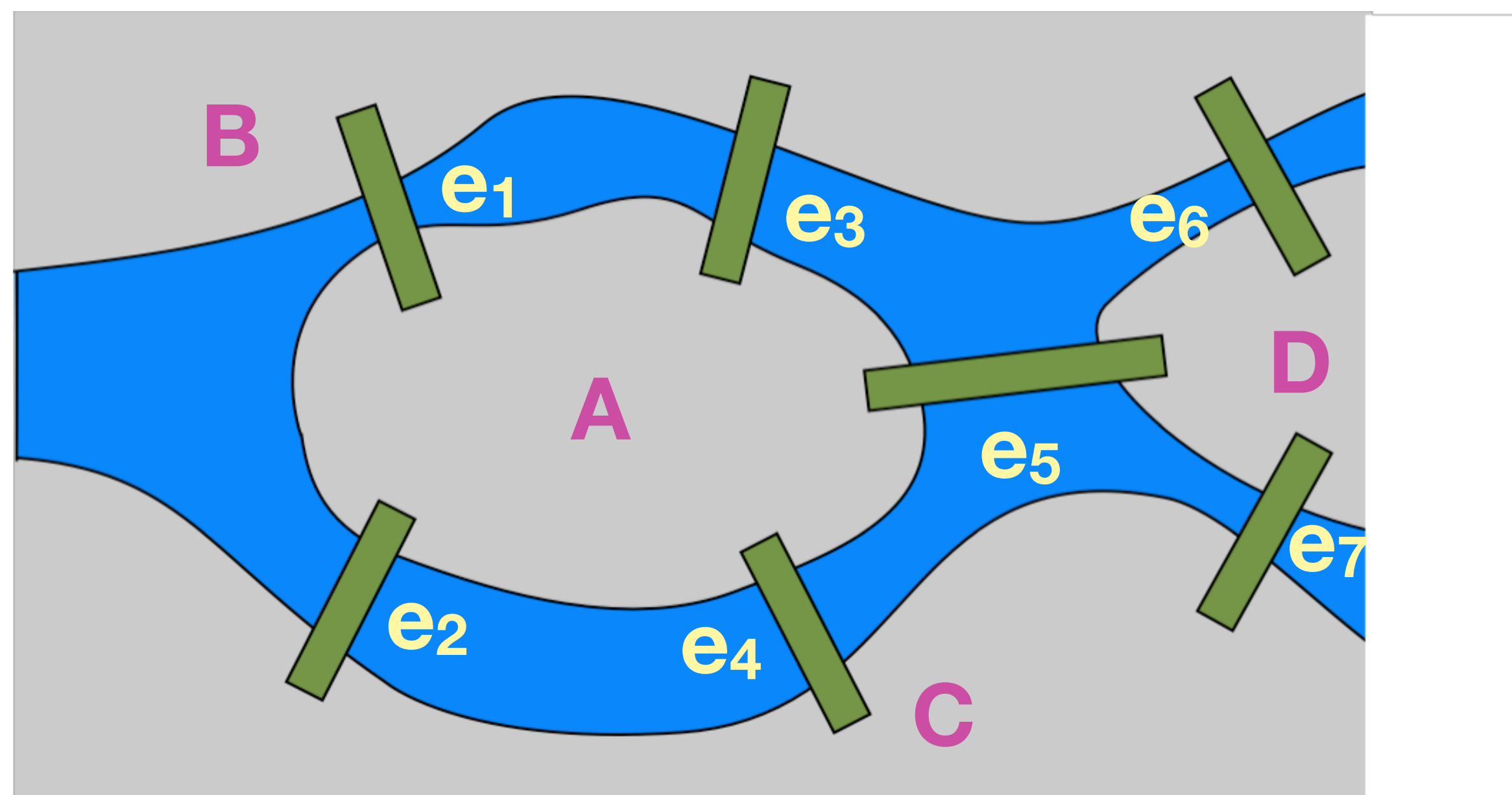
Ciro Visone



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Origini storiche della Teoria dei Grafi



Problema: E' possibile raggiungere tutte le parti della città attraversando tutti i ponti una sola volta?

Tale percorso lo chiameremo Euleriano

Eulero trasforma la mappa in una struttura schematica che contiene tutte le proprietà di connessione tra le parti della terraferma e i ponti che le collegano: il **GRAFO**



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

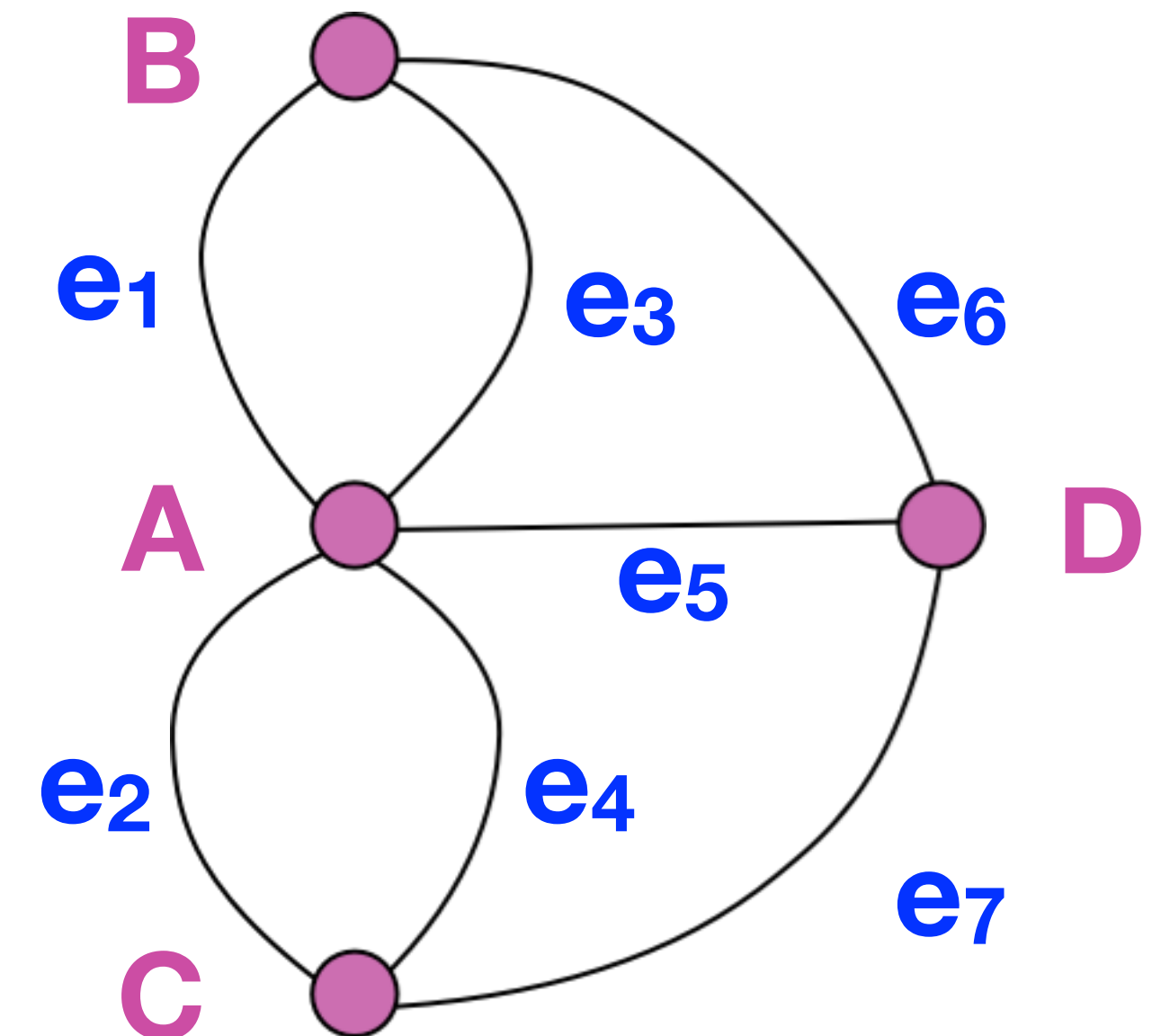
Origini storiche della Teoria dei Grafi

Gli elementi A, B, C, D si definiscono **VERTICI** gli elementi $e_1, e_2, \dots$ si definiscono **LATI**.

Il numero di lati che incidono in un vertice si definisce **GRADO** o **ORDINE** del vertice.

Dato un GRAFO, è possibile individuare un *percorso euleriano* se e solo se il numero di vertici del grafo con ordine dispari non è superiore a due

Eulero conclude che il problema dei ponti di Konisberg non ammette soluzione!





Esempi e definizioni

Ben al di là dei destini delle passeggiate degli abitanti della cittadina tedesca, Eulero ci ha consegnato una teoria matematica che oggi trova largo uso in una gran quantità di applicazioni della fisica e dell'ingegneria.

Per esempio nella **TEORIA DEI CIRCUITI ELETTRICI**.

Definizione di GRAFO

Un grafo è una struttura costituita da un insieme di vertici V , un insieme di lati E e da una relazione che esprime le connessioni tra di essi.

$$G = \{V, E, \psi\}$$

V = Insieme dei vertici, o nodi

E = Insieme dei lati

ψ = Relazione di incidenza

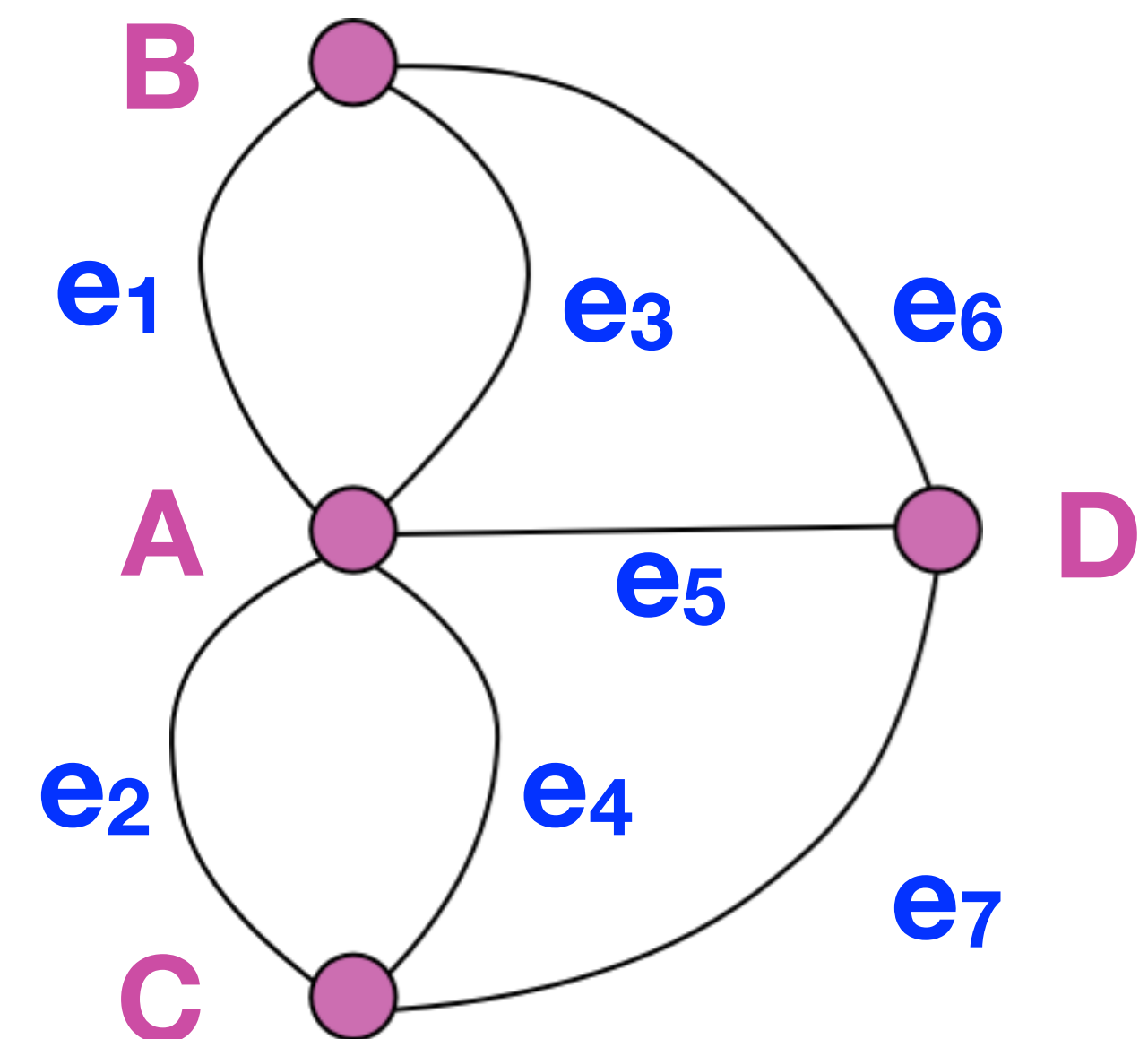
$$\psi : e \in E \rightarrow V_a V_b \in V \times V$$

Esempio: $V = \{A, B, C, D\}$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_7\}$$

$$\psi(e_1) = AB \quad \psi(e_2) = AC \quad \psi(e_3) = AB \quad \psi(e_4) = AC$$

$$\psi(e_5) = AD \quad \psi(e_6) = BD \quad \psi(e_7) = CD$$





Esempi e definizioni: Grafo e Sottografo

GRAFO

$$G = \{V, E, \psi\}$$

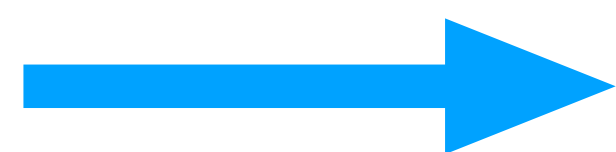
$$\psi : e \in E \rightarrow V_a V_b \in V \times V$$

SOTTOGRAFO

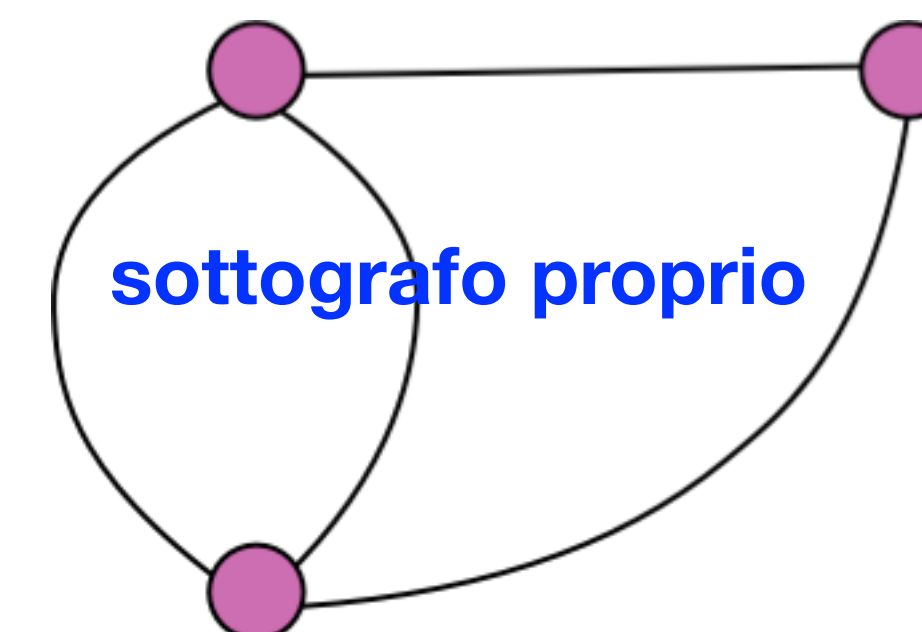
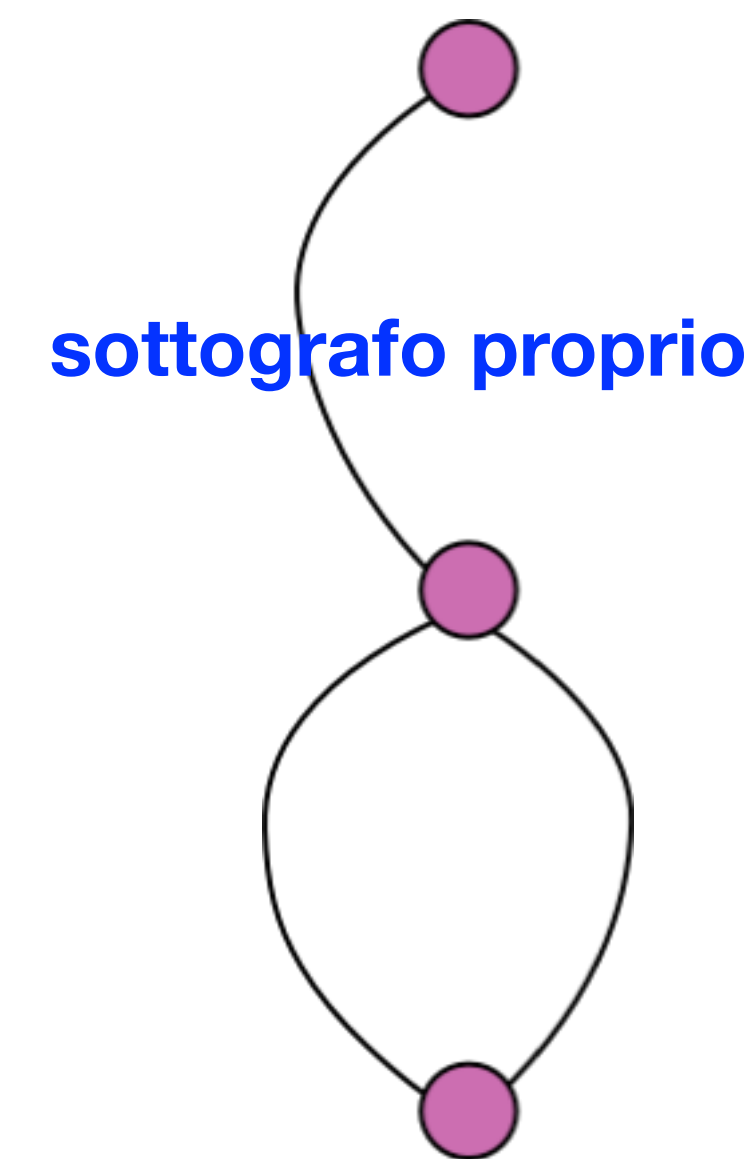
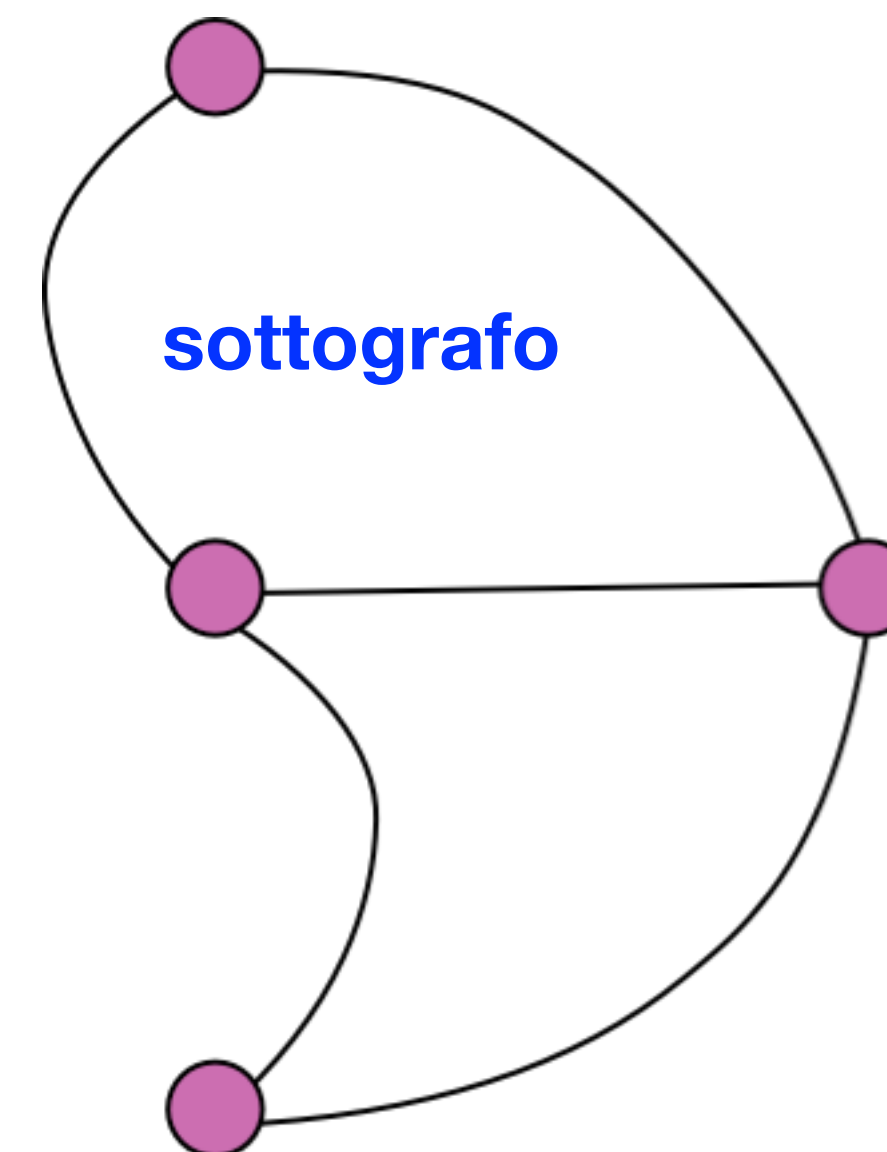
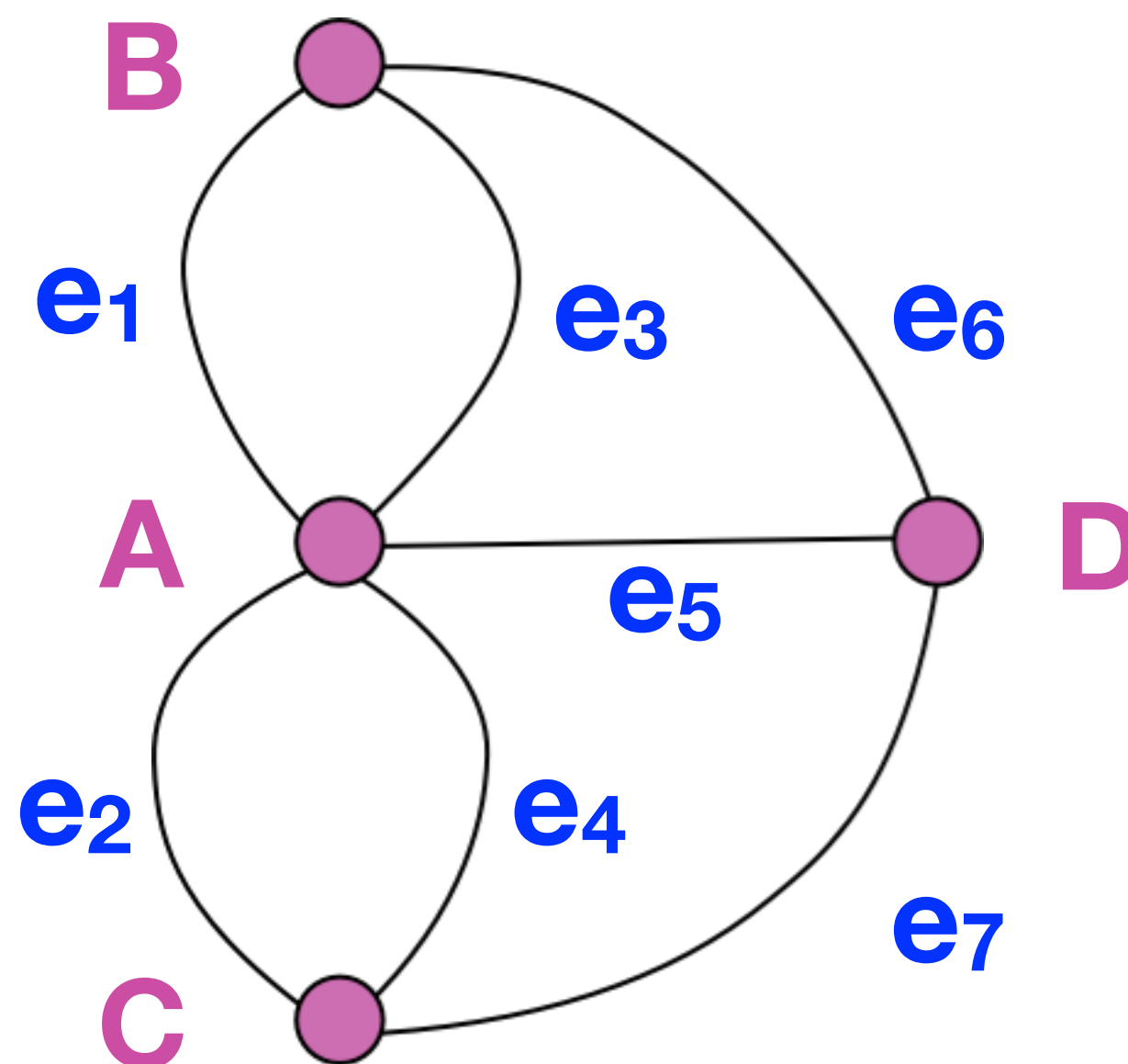
$$H = \{V', E', \psi\}$$

$$V' \subseteq V; E' \subseteq E; \psi' : E' \rightarrow V' \times V'$$

$$V \neq V'; E \neq E'$$



SOTTOGRAFO PROPRIO





DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Esempi e definizioni: Grafo Completo

GRAFO

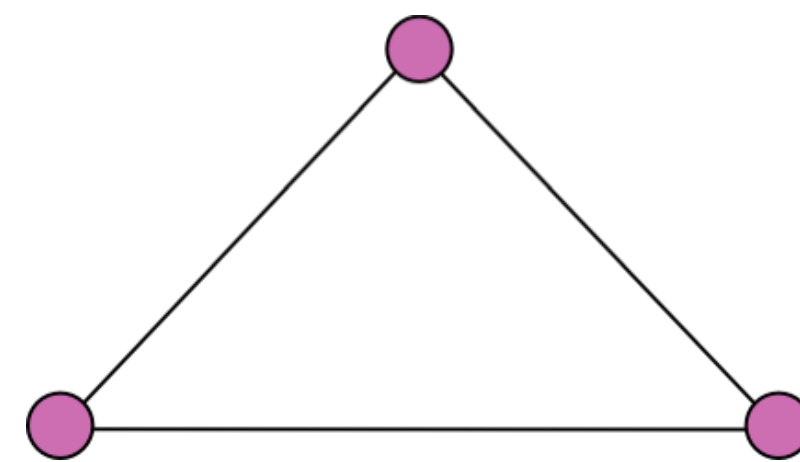
$$G = \{V, E, \psi\}$$

$$\psi : e \in E \rightarrow V_a V_b \in V \times V$$

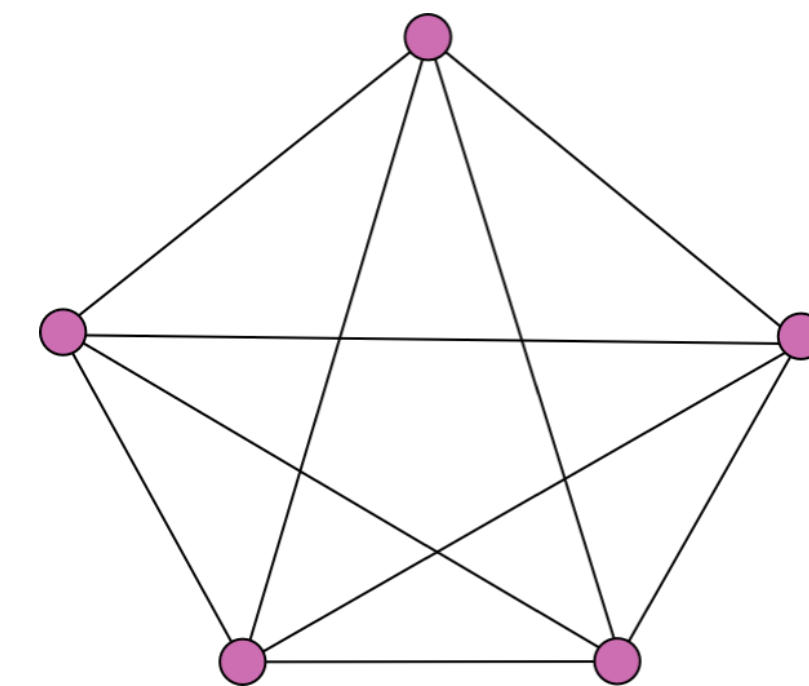
GRAFO COMPLETO

Per ogni coppia di nodi del grafo esiste un lato che li collega, o, più formalmente:

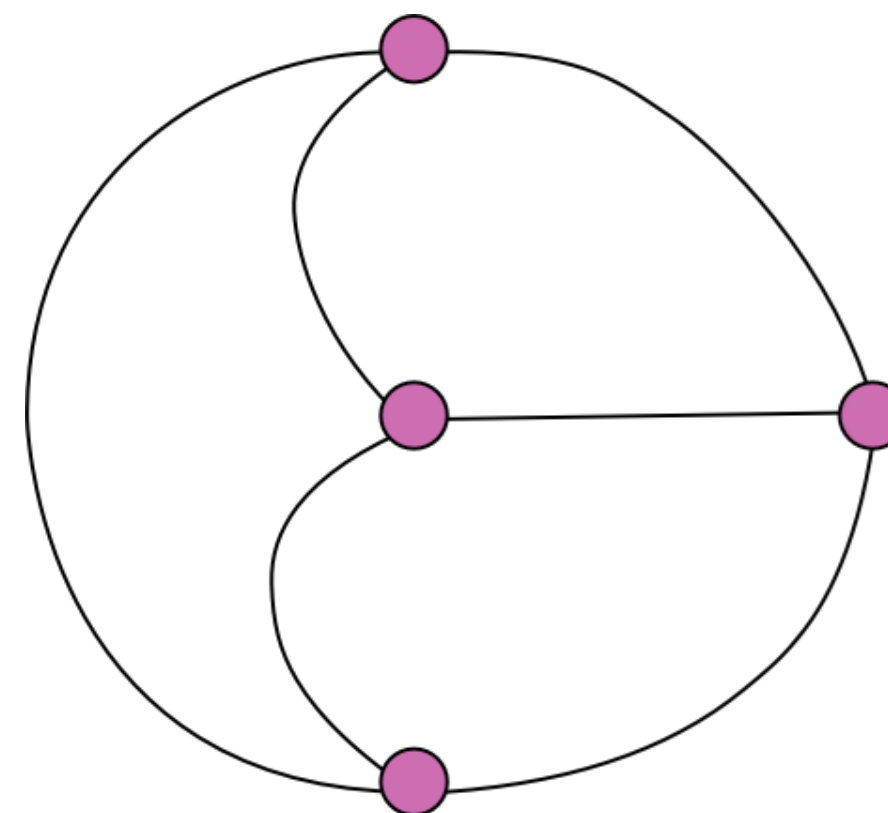
$$\forall V_1, V_2 \in V(G), \exists e \in E(V) : \psi(e) = V_1 V_2$$



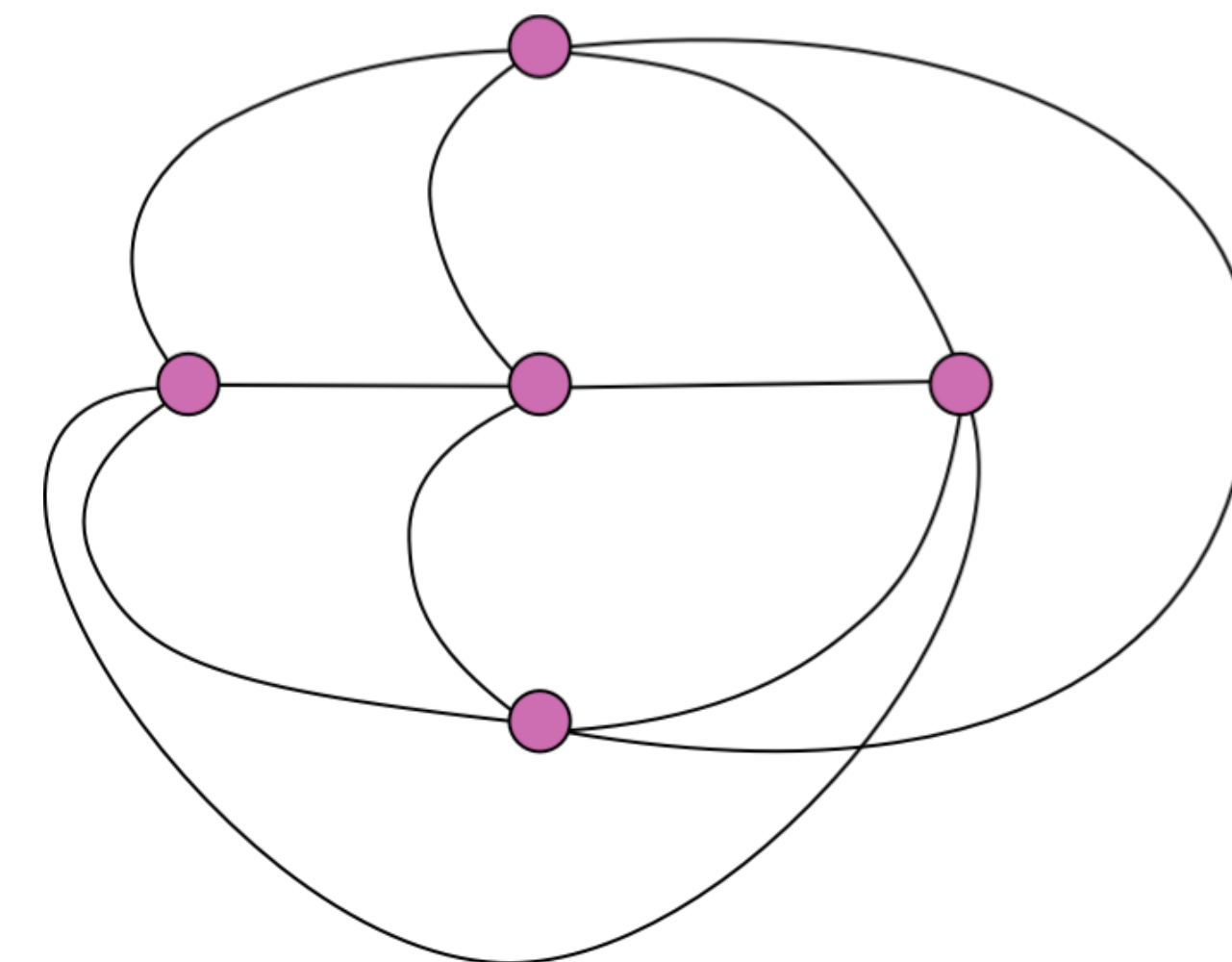
Trilatero completo: K_3



Pentalatero completo: K_5



Quadrilatero completo: K_4





Esempi e definizioni: Grafo Bipartito

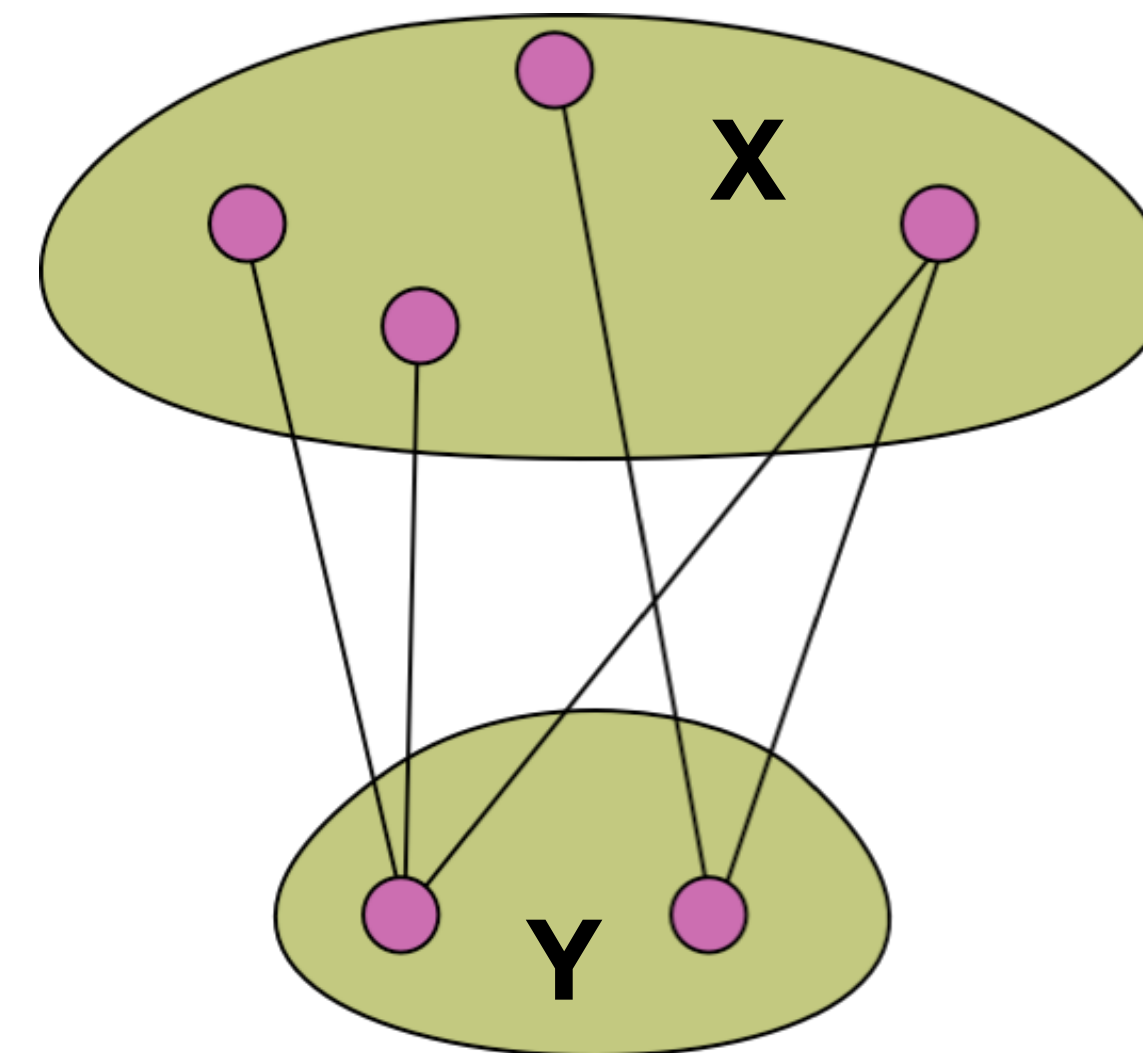
GRAFO

$$G = \{V, E, \psi\}$$

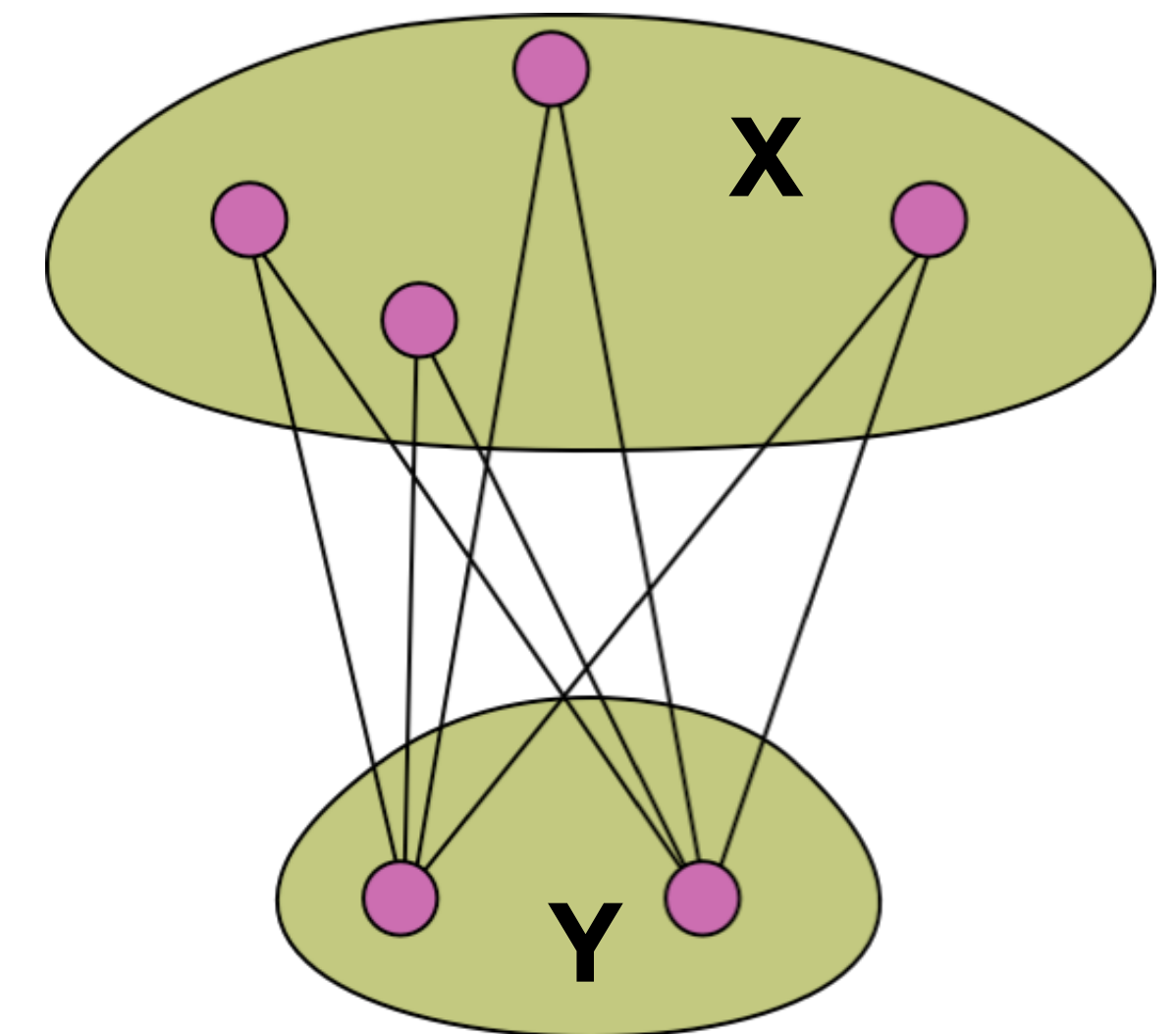
$$\psi : e \in E \rightarrow V_a V_b \in V \times V$$

GRAFO BIPARTITO

Ogni lato del grafo unisce vertici appartenenti a partizioni X e Y diverse



Grafo Bipartito



Grafo Bipartito Completo

$K_{4,2}$

$$G = \{V, E, \psi\} \quad V = X \cup Y$$

$$\forall e \in E, \psi(e) = ab \Leftrightarrow a \in X, b \in Y$$

Ogni coppia di lati di due partizioni diverse è collegata da un lato!

Se risulta anche che: $\forall a \in X, b \in Y \exists e \in E : \psi(e) = ab$

allora il Grafo Bipartito si dice completo



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Esempi e definizioni: Grado di connessione

GRAFO

$$G = \{V, E, \psi\}$$

$$\psi : e \in E \rightarrow V_a V_b \in V \times V$$

PARTIZIONI DI UN GRAFO

Dato il grafo G , si considerino gli insiemi di nodi $V_1, \dots, V_\omega$ tali che:

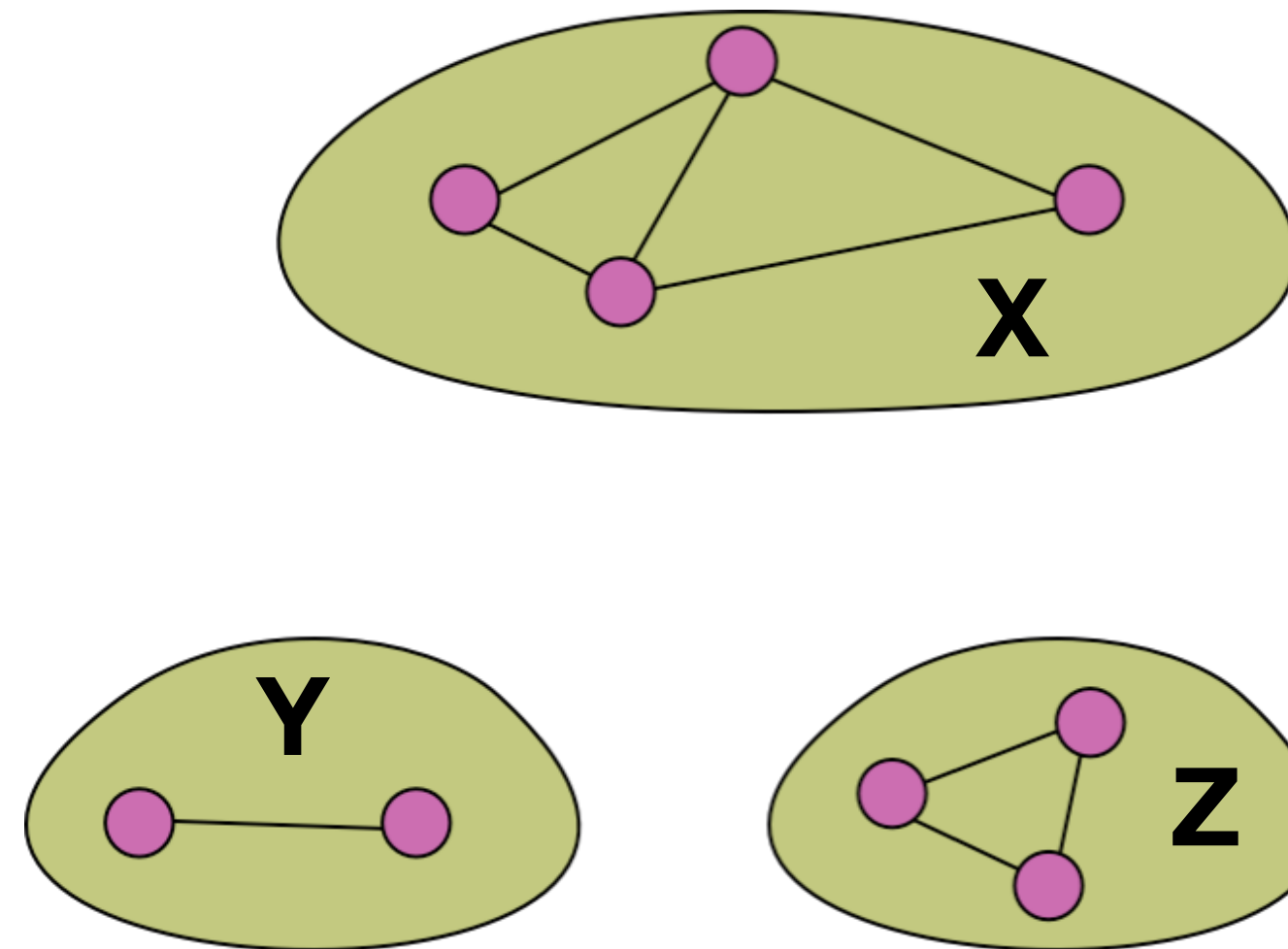
$$V = \cup V_k, k = 1, \dots, \omega$$

Se $\forall e \in E, \psi(e) = ab \Leftrightarrow a, b \in V_k$

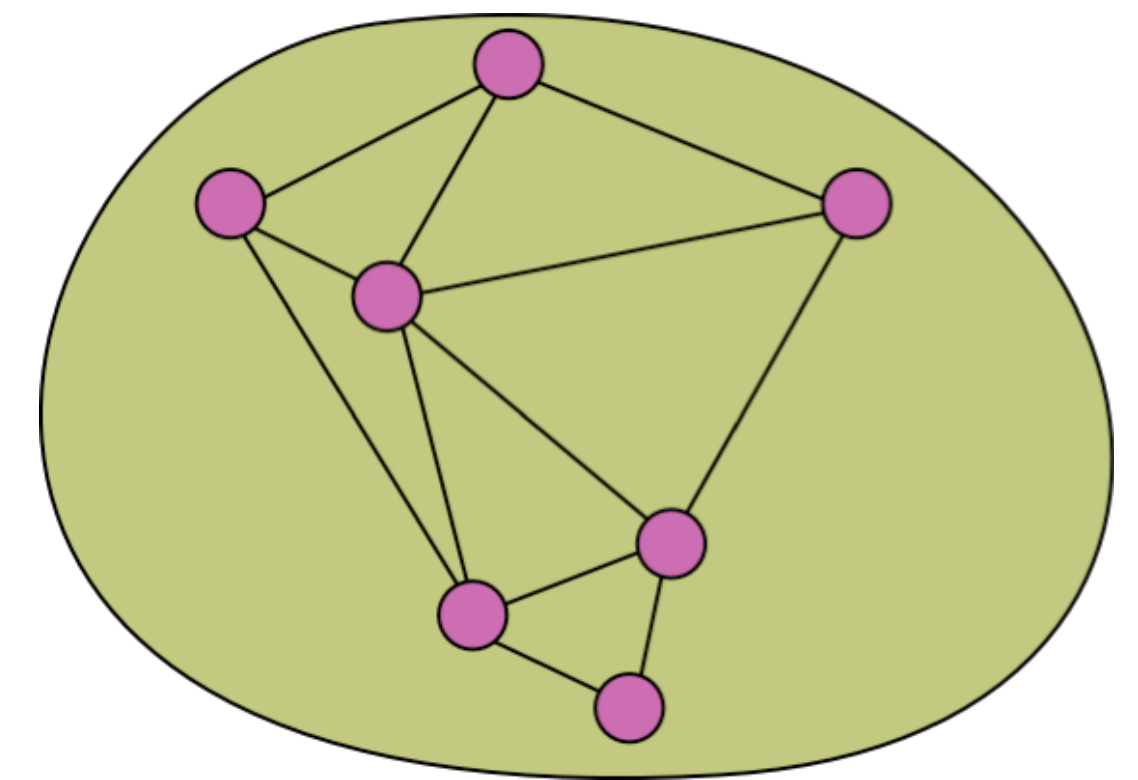
risulta $G = \cup_k G(V_k)$



Il Grafo è quindi **PARTIZIONATO** in ω parti



Grafo non connesso: $\omega = 3$



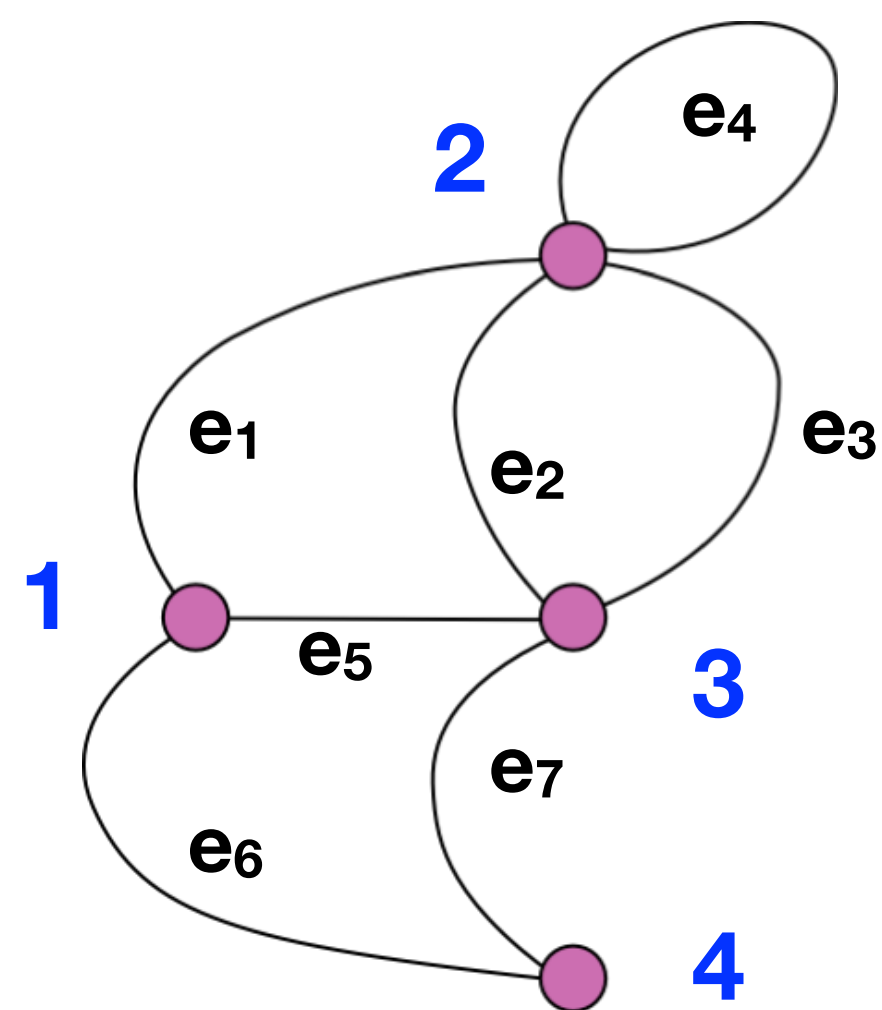
Grafo connesso: $\omega = 1$

GRAFO CONNESSO

Se il grafo è costituito da un'unica partizione, cioè $\omega = 1$, allora il grafo si dice **CONNESSO**.



Esempi e definizioni: Matrice di Incidenza



$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 2

Matrice di incidenza

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_j \text{ incide una volta nel vertice } n_i, \\ 0 & \text{se } e_j \text{ non incide nel vertice } n_i, \\ 2 & \text{se } e_j \text{ incide due volte nel vertice } n_i \end{cases}$$

Grado di un vertice: Numero di lati che incidono su quel nodo.

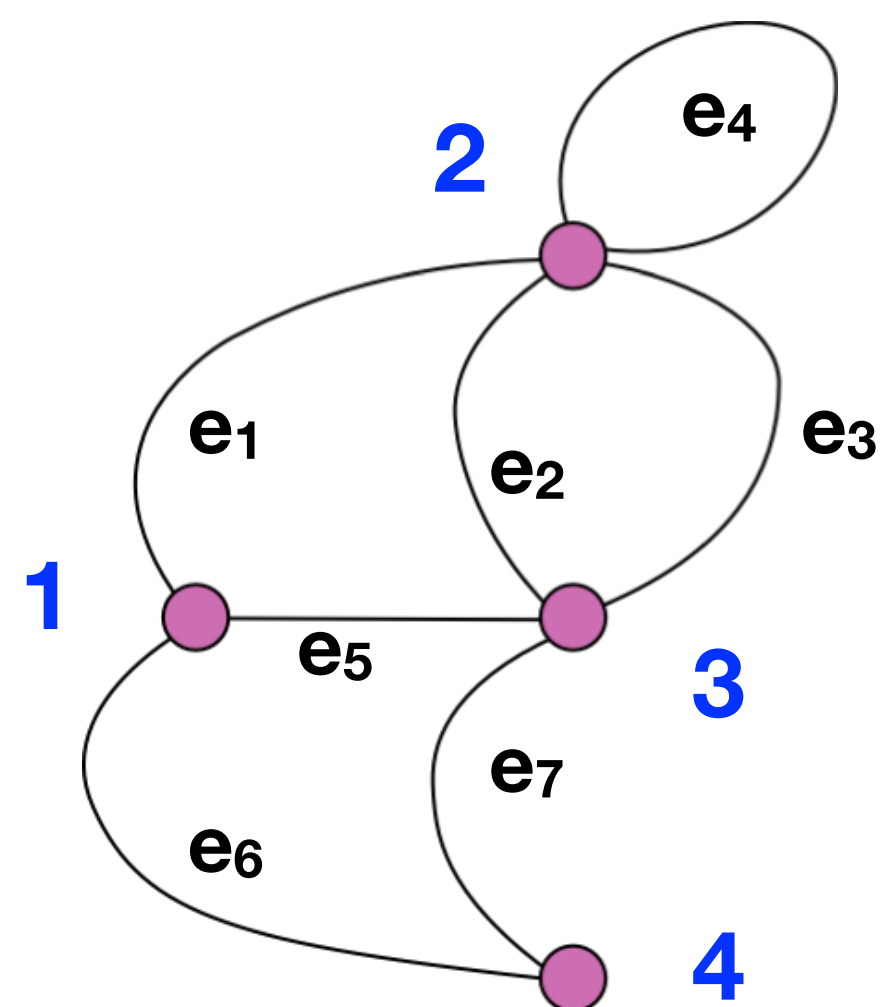
E' facile verificare che il grado di un vertice è la somma degli elementi di una riga:

$$\sum_k a_{ik} = d(V_i)$$

- La matrice di incidenza rappresenta in maniera sintetica la relazione di incidenza del grafo e contiene tutte le informazioni relative all'incidenza di un lato in un nodo.
- Nella teoria dei circuiti avremo bisogno non solo di descrivere l'incidenza LATO-VERTICE ma anche se il lato è ENTRANTE o USCENTE dal NODO o vertice.
- Tale richiesta può essere soddisfatta semplicemente orientando i lati del grafo, come vedremo più avanti.



Esempi e definizioni: Matrice di Incidenza

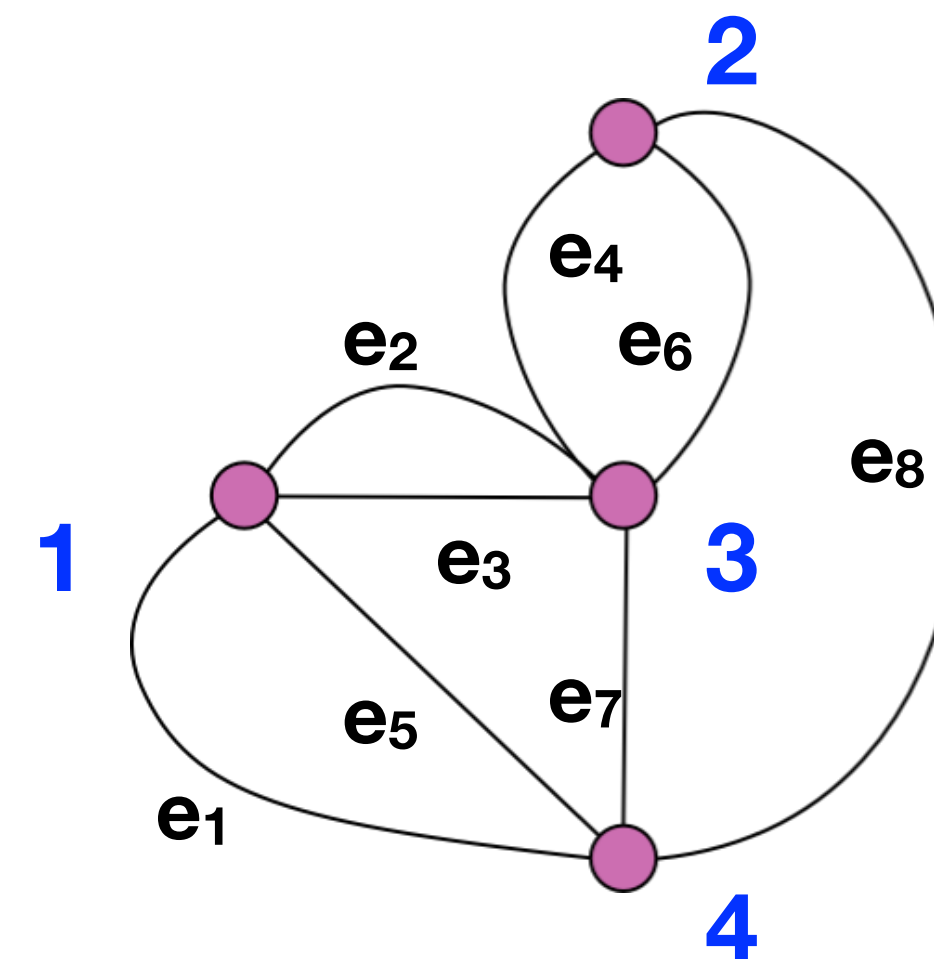


$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 2

Matrice di incidenza

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } e_j \text{ incide una volta nel vertice } n_i, \\ 0 & \text{se } e_j \text{ non incide nel vertice } n_i, \\ 2 & \text{se } e_j \text{ incide due volte nel vertice } n_i \end{cases}$$



ESERCIZIO

Trovare la matrice di incidenza del Grafo in figura.

$$\mathcal{A} = ?$$



Esempi e definizioni: Grafo Planare

Un grafo è planare se può svilupparsi con qualunque deformazione continua su un piano senza che i lati si intreccino.

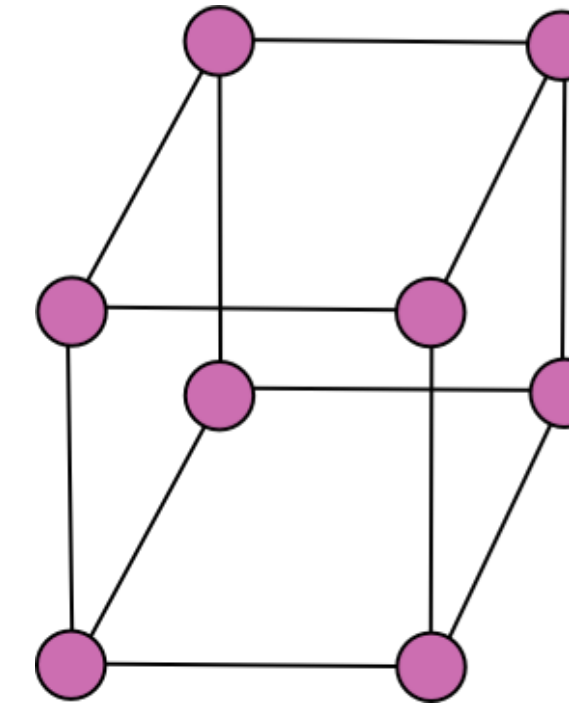
Nell'esempio sopra il grafo è **PLANARE**, mentre quello in basso, se sviluppato in un piano, richiede comunque che il lato che connette i nodi A e B “incroci” necessariamente un lato del grafo.

ESERCIZIO

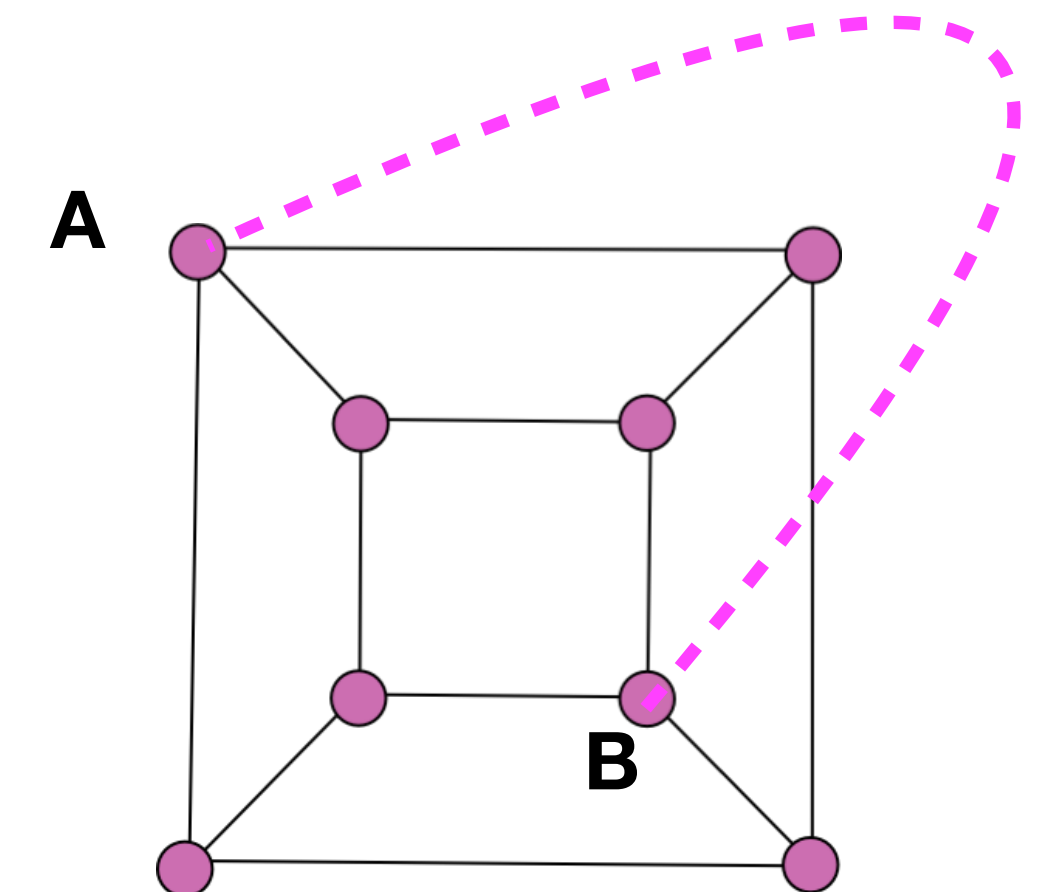
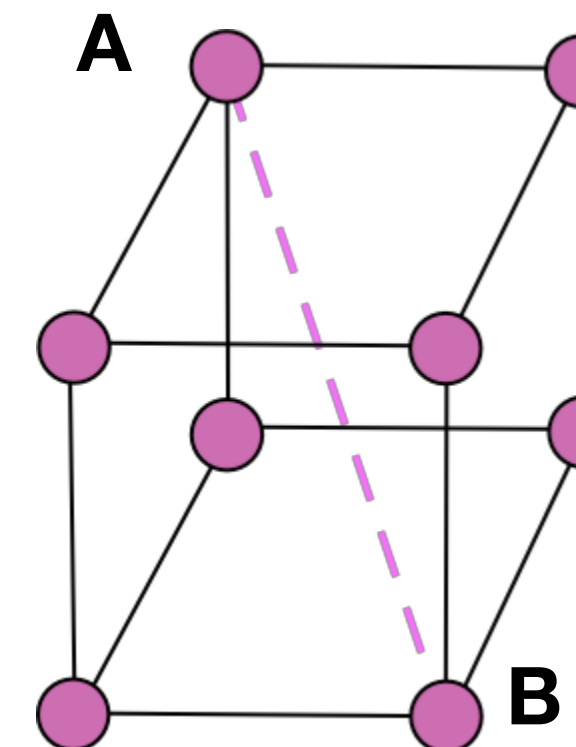
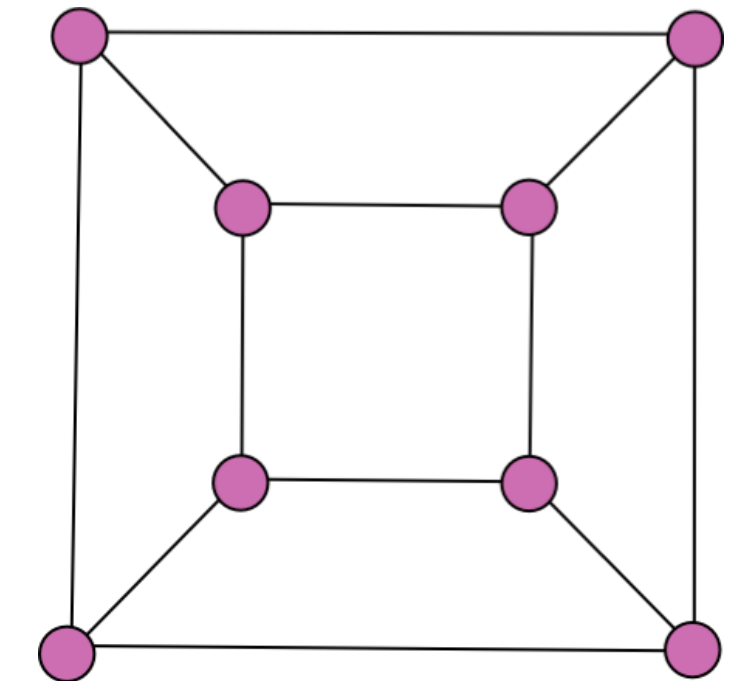
Un quadrilatero completo è planare?

Un pentagono completo è planare?

Qual'è il grado di connessione di un grafo completo?



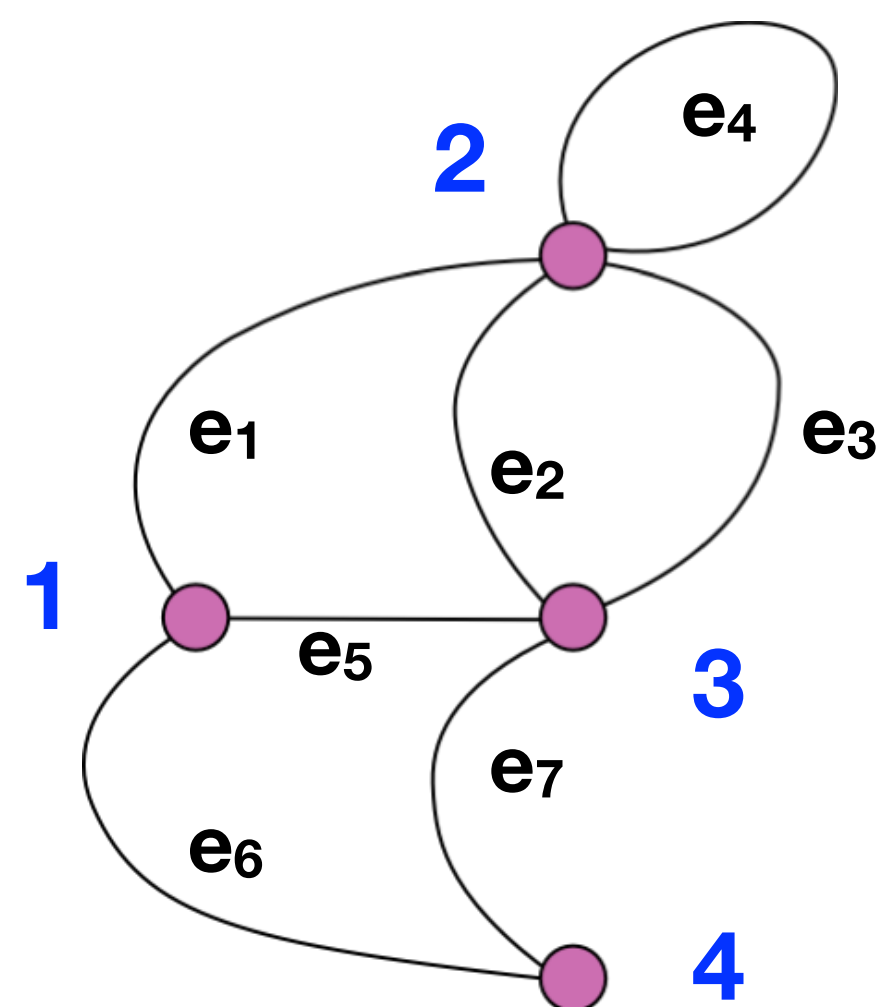
Grafo Planare



Grafo non Planare



Esempi e definizioni: WALK, TRAIL e PATH

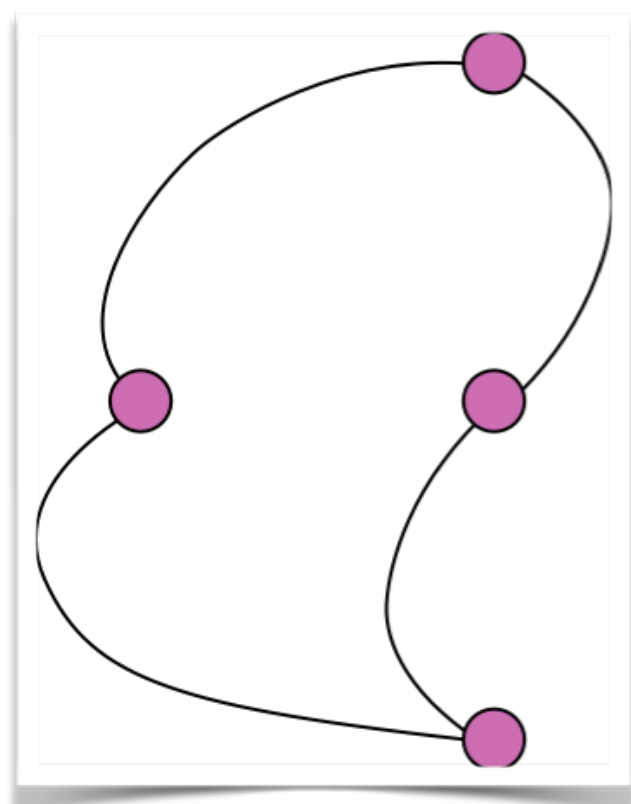


Cammino o WALK : sequenza di vertici e lati che unisce il vertice V_0 al vertice V_k

$$V_0 e_1 V_1 e_2 V_2 \dots e_k V_k$$

Tracciato o TRAIL: cammino senza ripetizioni di lati nella sequenza

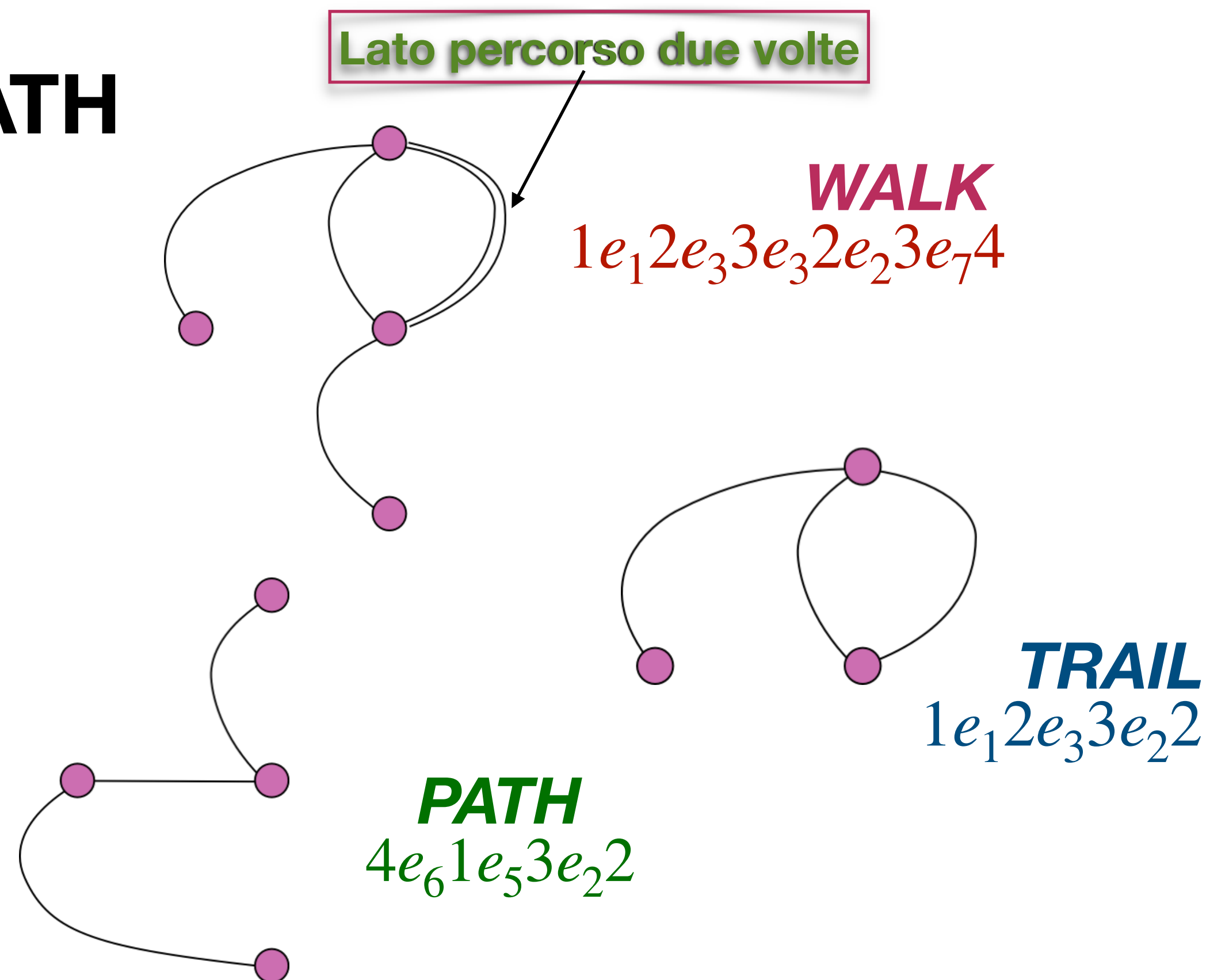
Percorso o PATH : tracciato senza ripetizioni di vertici nella sequenza



CICLO O MAGLIA: E' un tracciato senza ripetizioni di nodi interni. L'unica ripetizione di nodi ammessa è $V_0 \equiv V_k$

$1e_1 2e_3 3e_7 4e_6 1$

E' una maglia!



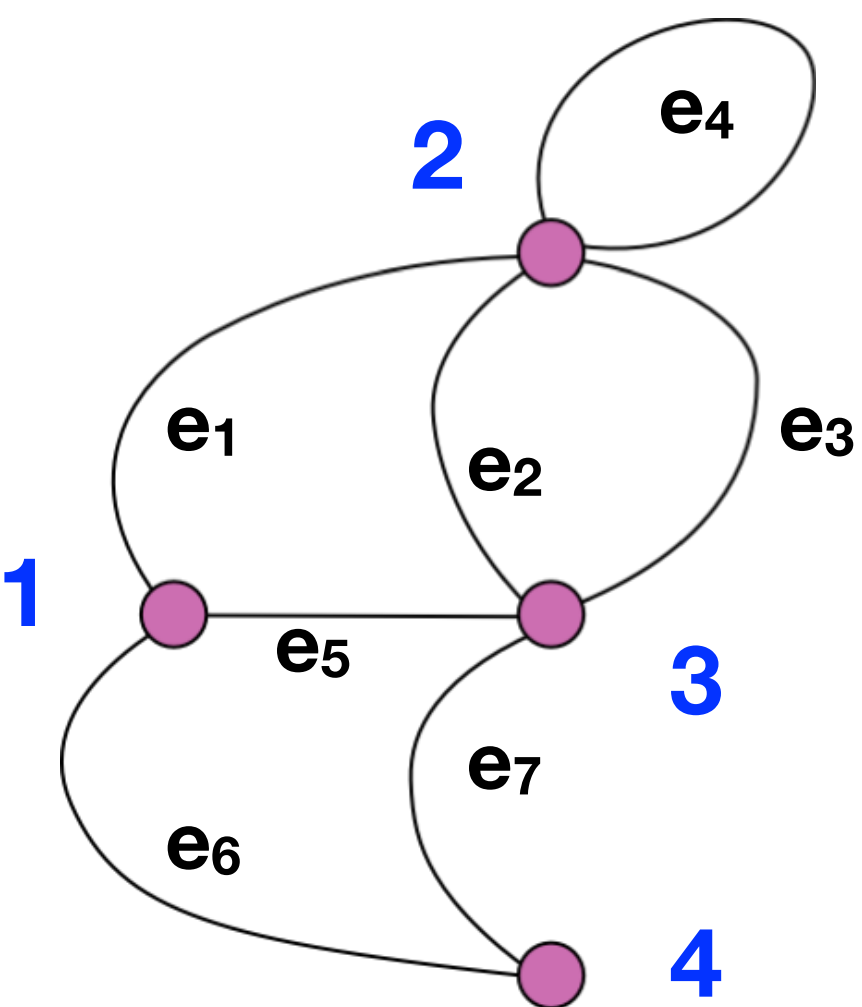
Proprietà: Il grado di ogni nodo di una maglia è 2



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

TAGLIO



$$G = \{V, E, \psi\} \longleftarrow \text{GRAFO}$$

TAGLIO: Insieme MINIMO di lati che asportati dal grafo ne aumenta l'ordine di connessione. In simboli:

$$T = \{e_1, e_2, \dots, e_r\} \subseteq E \longrightarrow \text{TAGLIO}$$

SE E SOLO SE $G^* = \{V, E - T, \psi\}$ TALE CHE

$$\omega(G^*) > \omega(G)$$

ALBERO

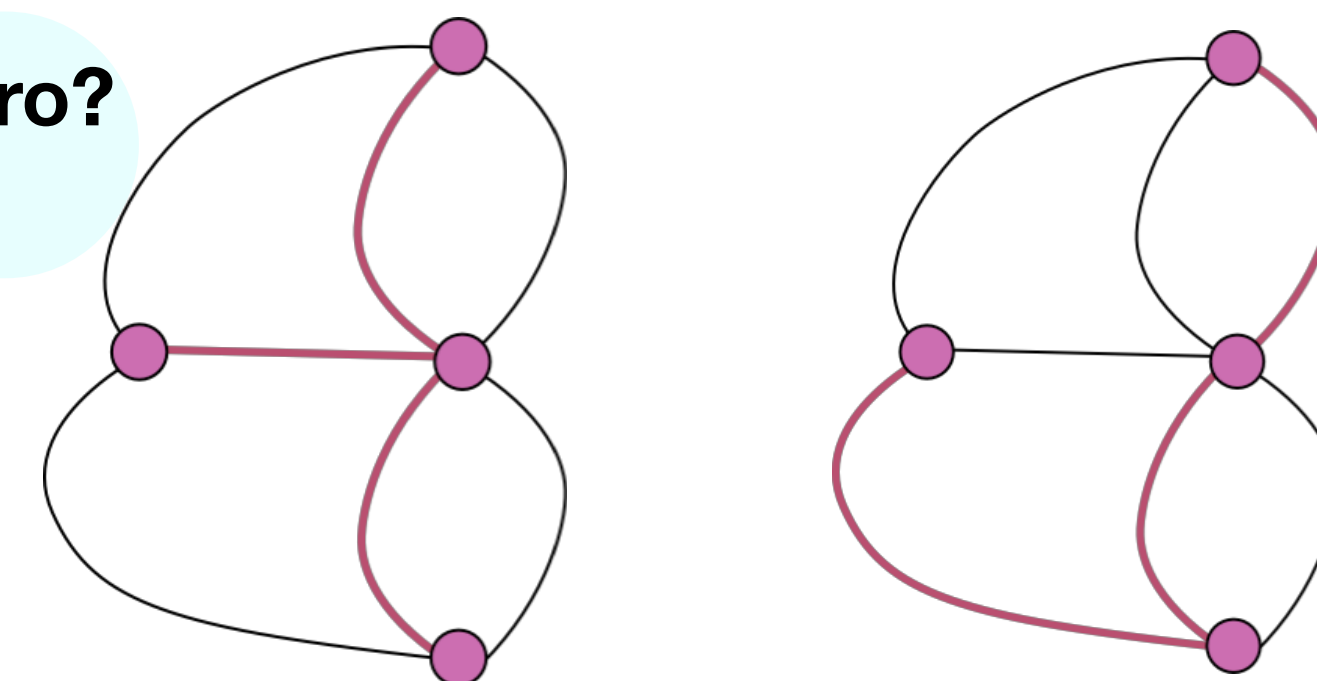
$$\mathcal{A} = \{V, L, \psi\} \longleftarrow \text{GRAFO CONNESSO}$$

ALBERO: Grafo di cui ogni lato è un TAGLIO.

$\mathcal{A}$ è un albero (solo lati rossi...)



$$\mathcal{A}^* = \{V, L - e_k, \psi\} : \omega(\mathcal{A}^*) > \omega(\mathcal{A}) \\ \forall e_k \in L$$



Un PATH è sempre un albero?
Vale il vice-versa?

Esempi di tagli:

$$T_1 = e_1, e_2, e_3$$

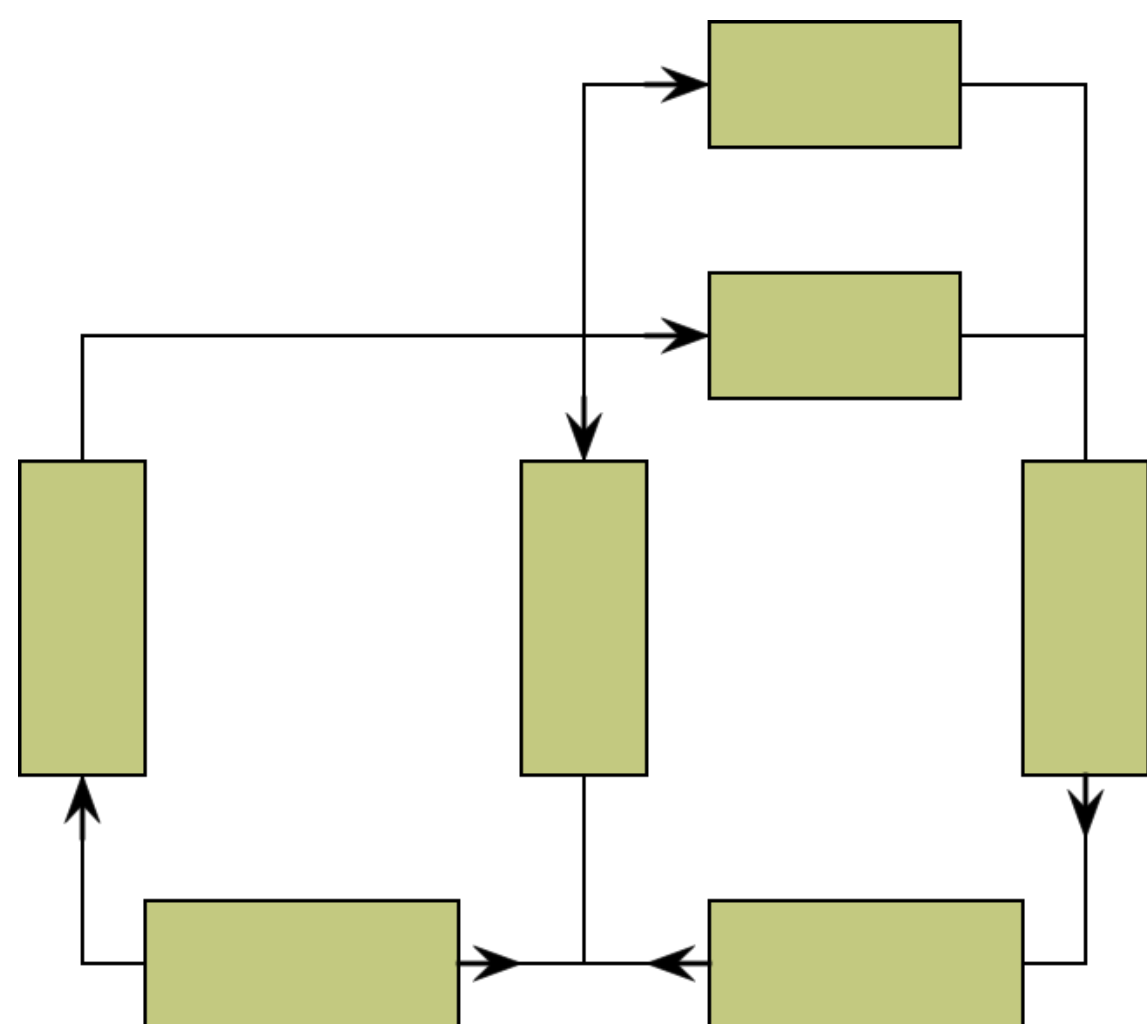
$$T_2 = e_1, e_5, e_7$$

CO-ALBERO

Se $G = \{V, E, \psi\}$ è un GRAFO e $\mathcal{A}$ un suo albero $E - L$ è un co-albero (lati neri...)



GRAFI ORIENTATI E MATRICI TOPOLOGICHE



Circuito: Su tutti i bipoli è stata assunta la convenzione dell'utilizzatore.

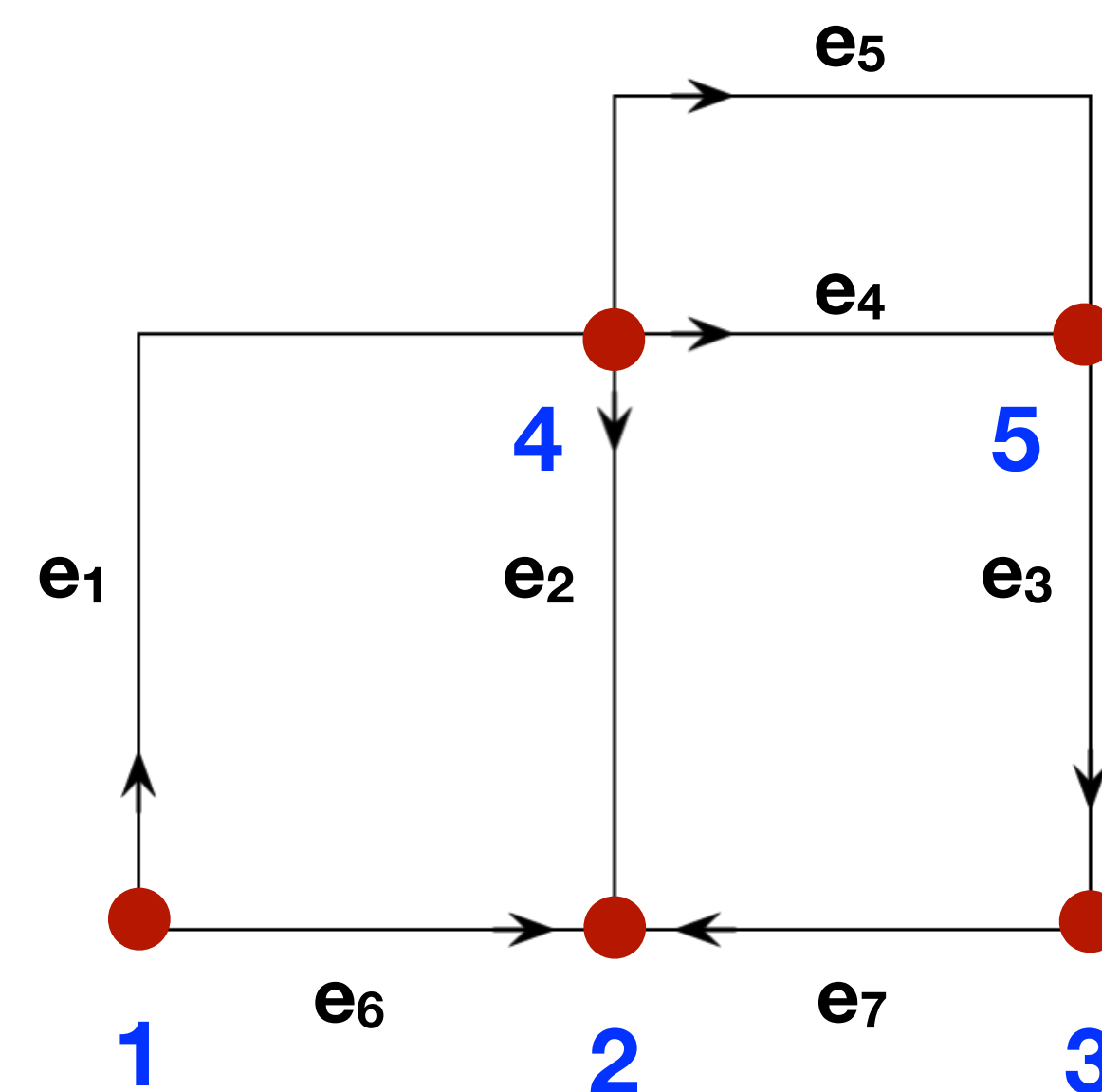
MATRICE DI INCIDENZA

Assumendo pertanto il riferimento delle correnti, il riferimento per le tensioni è implicitamente assegnato!

Per un **GRAFO ORIENTATO** la matrice di incidenza si definisce come segue:

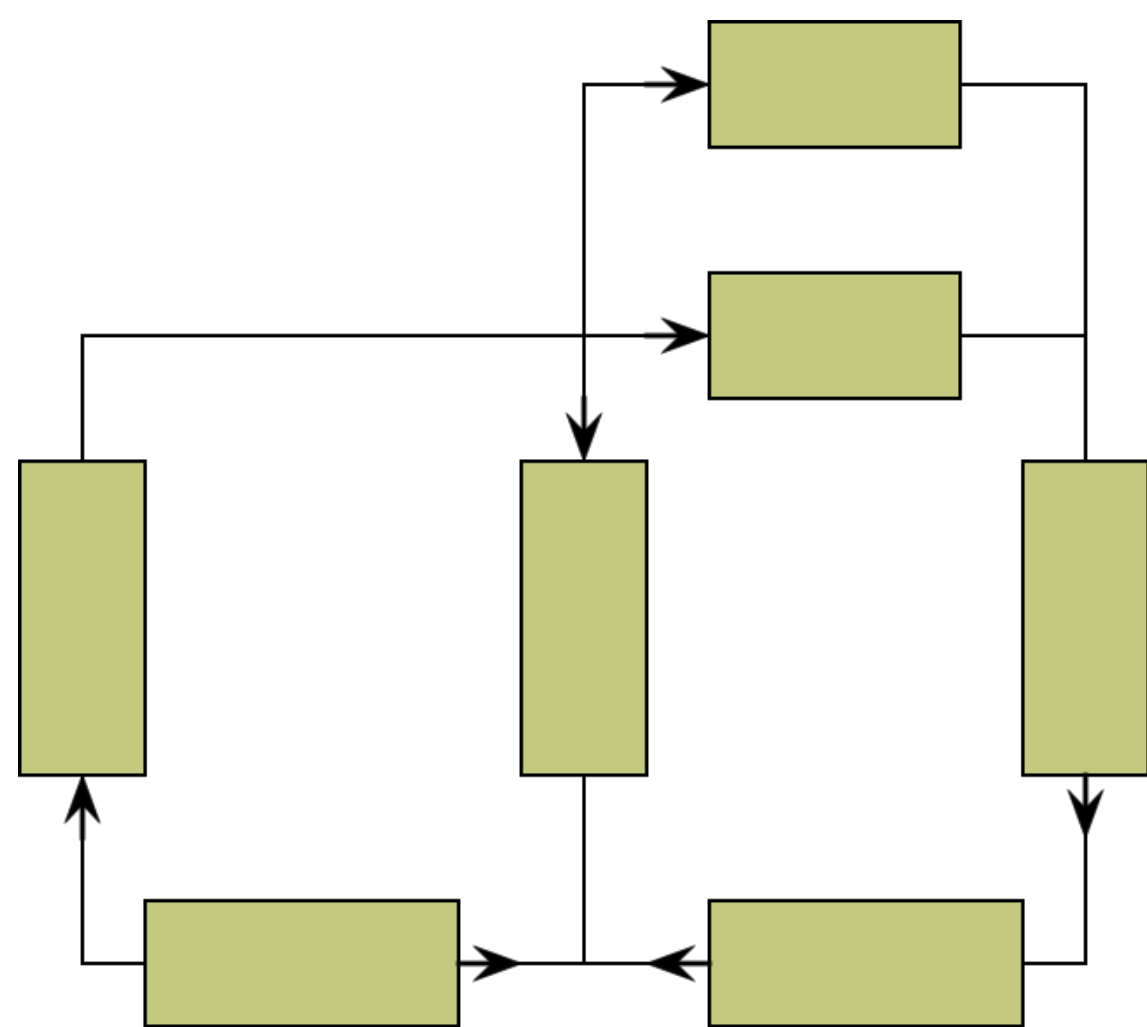
$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } e_j \text{ ENTRA nel vertice } n_i, \\ 0 & \text{se } e_j \text{ NON INCIDE nel vertice } n_i, \\ +1 & \text{se } e_j \text{ ESCE dal vertice } n_i \end{cases}$$

Al circuito fisico associamo quindi un **GRAFO ORIENTATO**



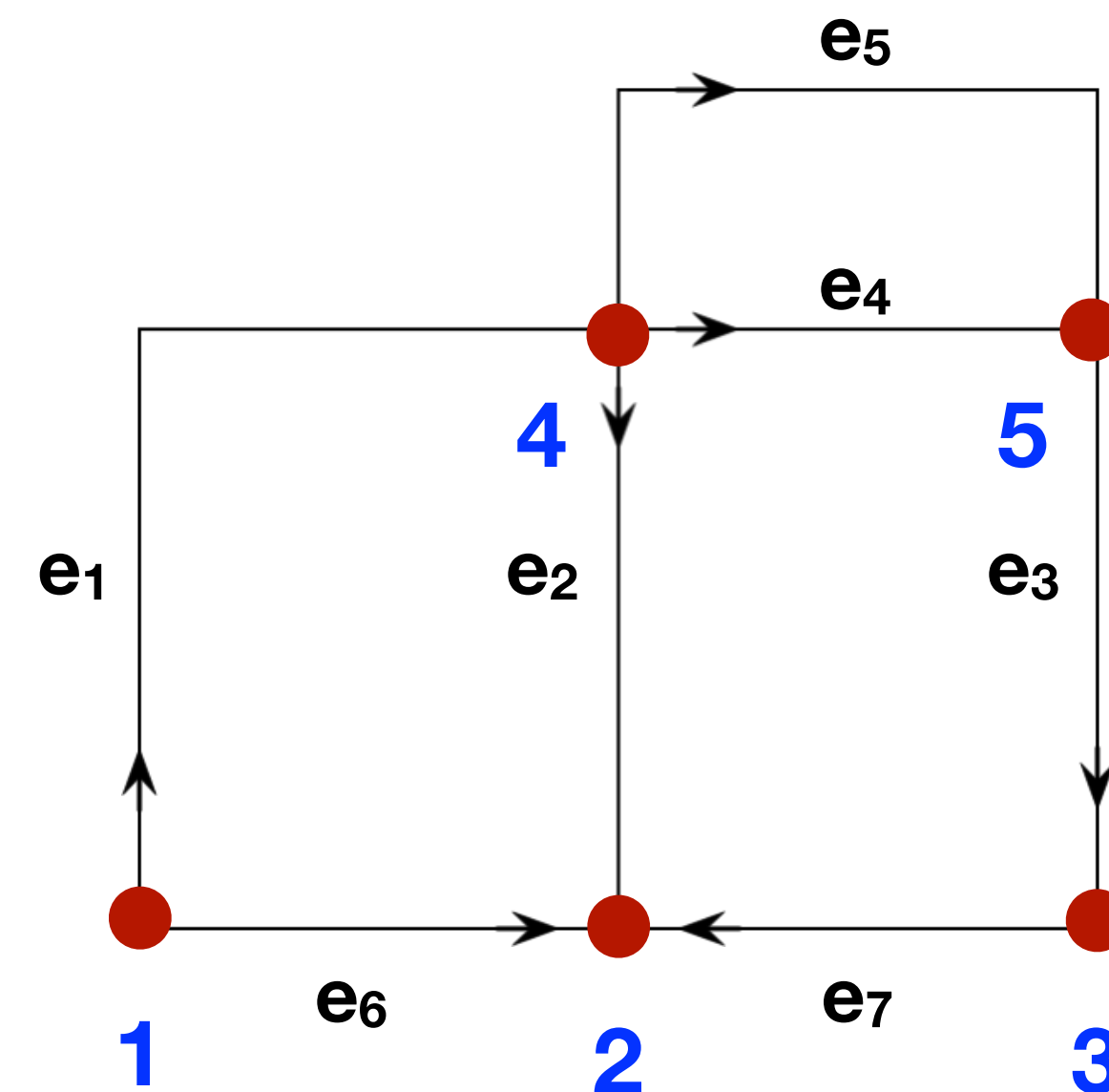


GRAFI ORIENTATI E MATRICI TOPOLOGICHE

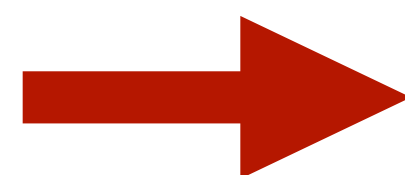


$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al circuito fisico associamo quindi un **GRAFO ORIENTATO**



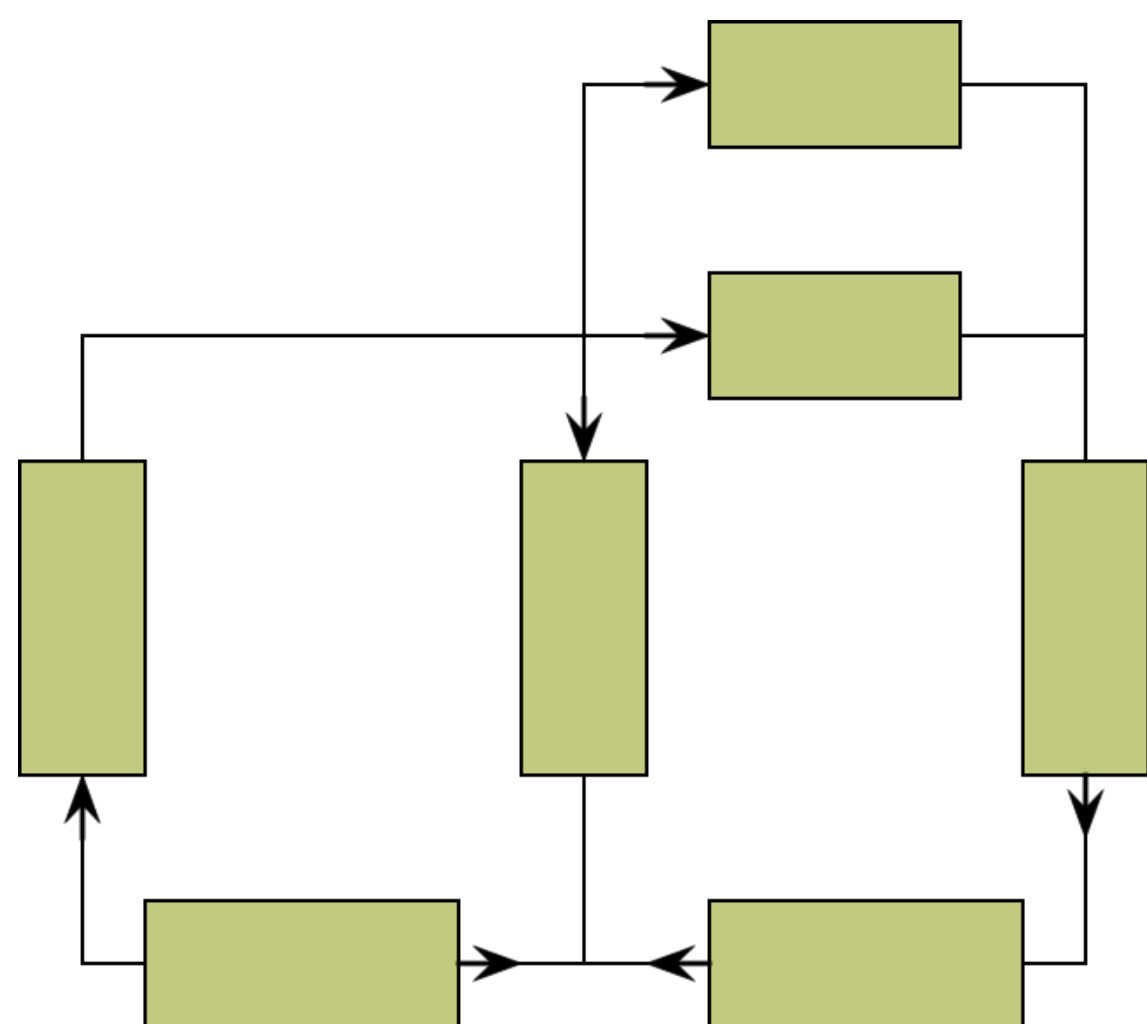
Proprietà: La somma delle righe di una matrice di incidenza in un grafo orientato è ZERO!



Le righe della matrice di incidenza non sono **INDIPENDENTI!**

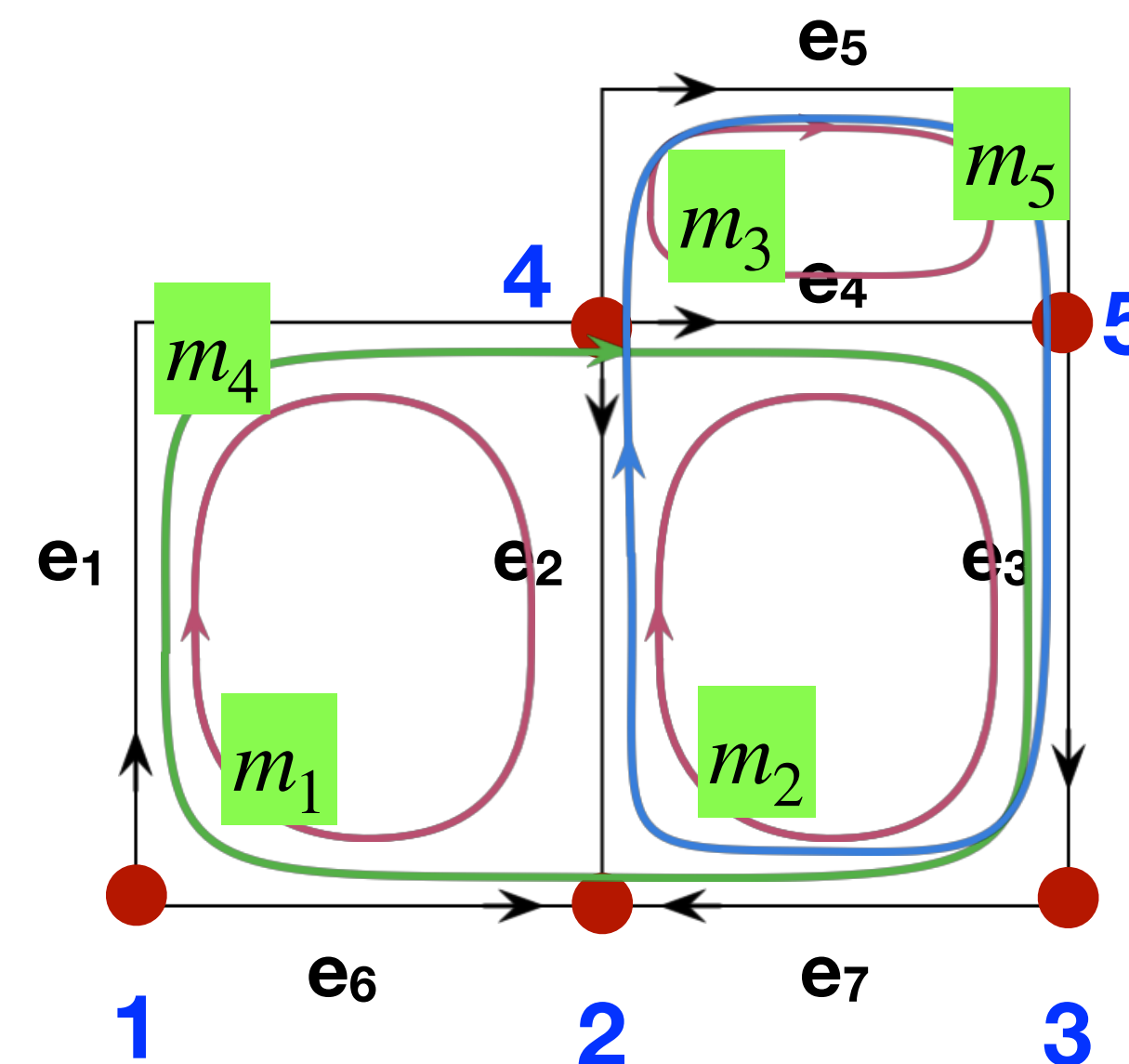


GRAFI ORIENTATI E MATRICI TOPOLOGICHE



Circuito: Su tutti i bipoli è stata assunta la convenzione dell'utilizzatore.

A lato sono rappresentate alcune delle maglie orientate del grafo.



MATRICE DI MAGLIA

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } e_j \in m_i - \text{versi discordi} \\ 0 & \text{se } e_j \notin m_i \\ +1 & \text{se } e_j \in m_i - \text{versi concordi} \end{cases}$$

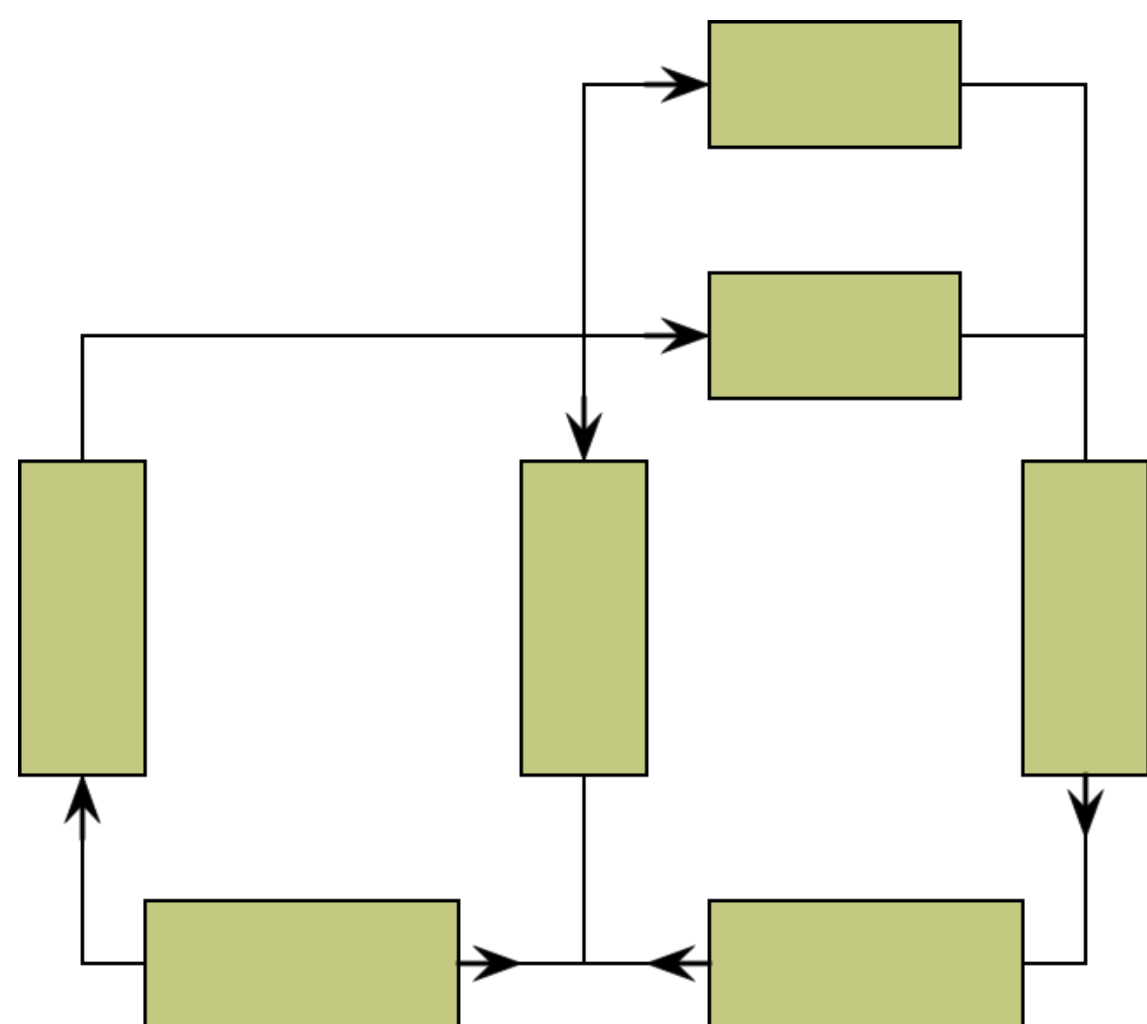
Anello

Ogni maglia di un GRAFO PLANARE che non contiene maglie al suo interno si definisce ANELLO

Nel grafo in figura m_1, m_2, m_3 sono degli anelli



GRAFI ORIENTATI E MATRICI TOPOLOGICHE

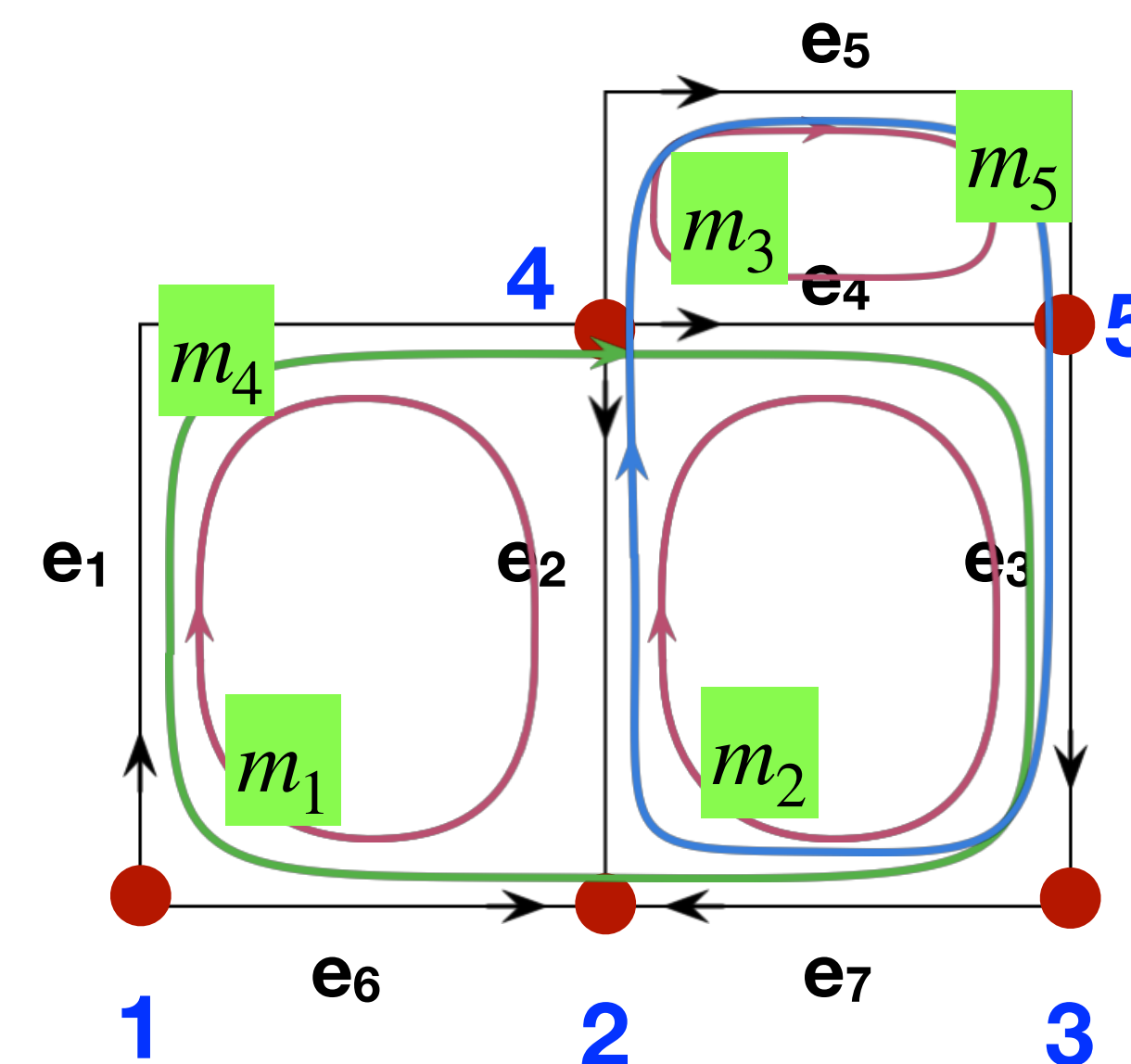
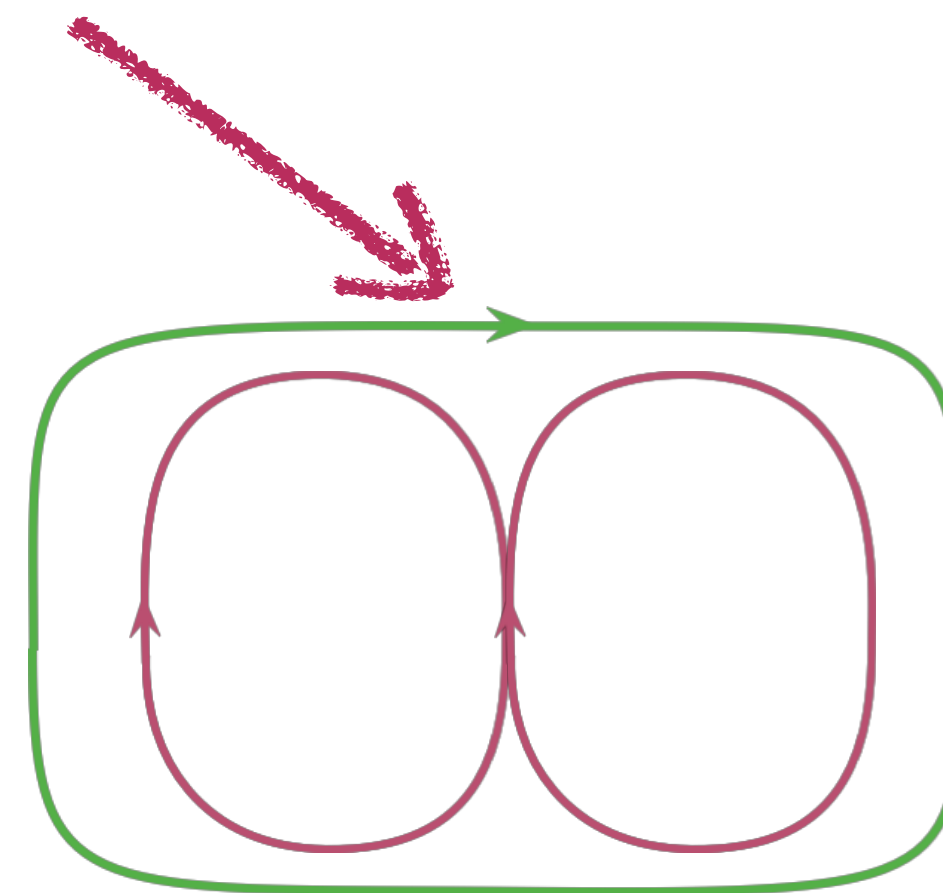


Circuito: Su tutti i bipoli è stata assunta la convenzione dell'utilizzatore.

A lato sono rappresentate alcune delle maglie orientate del grafo.

ALCUNE MAGLIE SONO UNIONE DI ALTRE

E' possibile individuare un insieme di maglie da cui costruire per unione tutte le altre del grafo. Tali maglie si chiamano **MAGLIE FONDAMENTALI**



$$m_1 = e_1 \cup e_2 \cup e_6$$

$$m_2 = e_2 \cup e_3 \cup e_7$$

$$m_4 = m_1 \cup m_2$$

Le maglie comuni si elidono!!!



MAGLIE FONDAMENTALI DI UN GRAFO

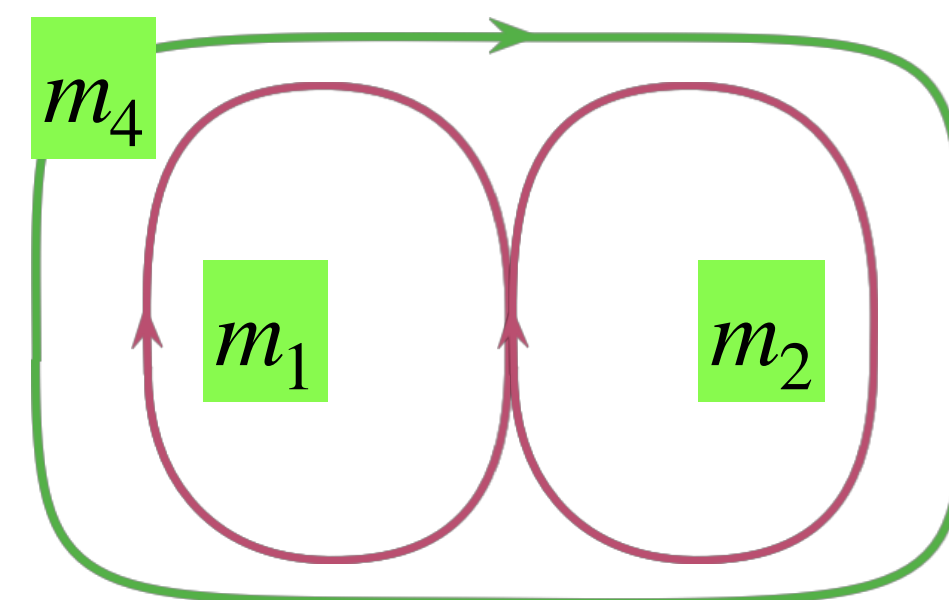
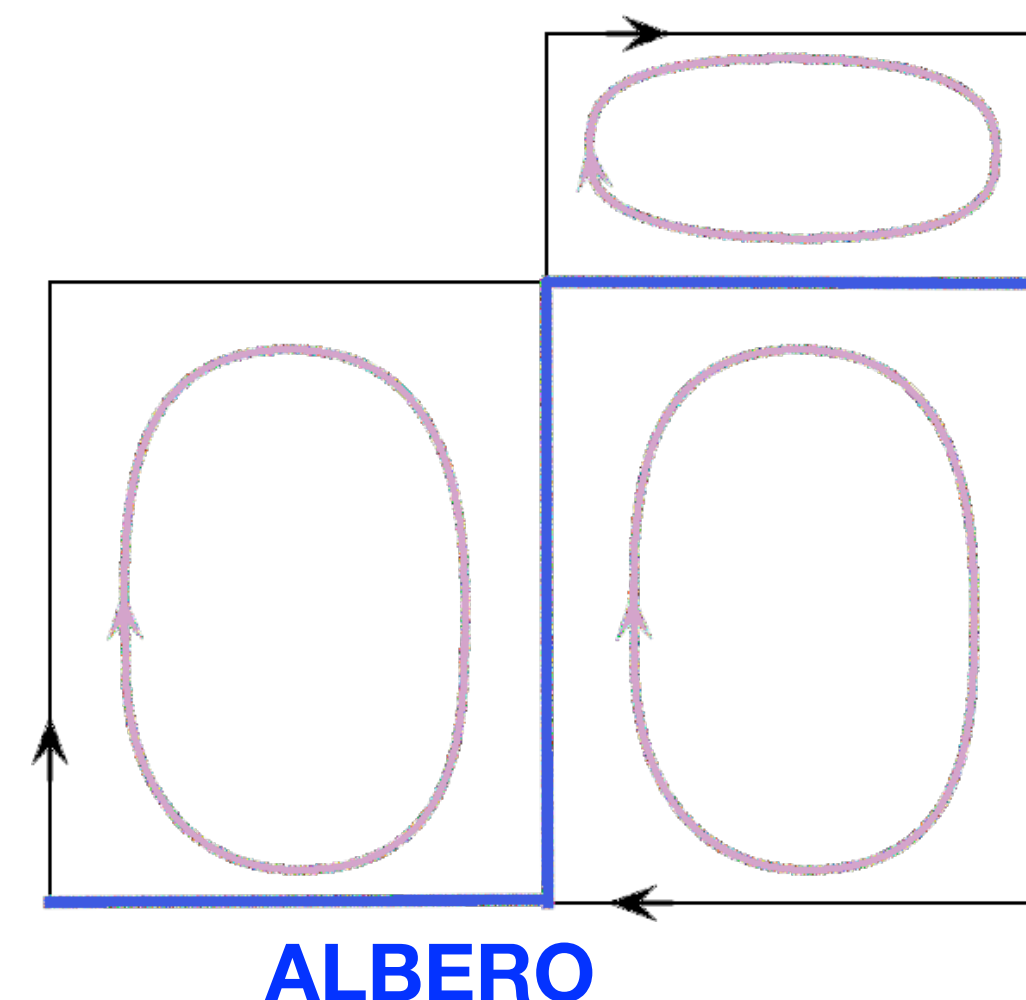
MAGLIA FONDAMENTALE

Aggiungendo all'albero un lato di co-albero viene chiusa una maglia, che si definisce **MAGLIA FONDAMENTALE**.

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } e_j \in m_i - \text{versi discordi} \\ 0 & \text{se } e_j \notin m_i \\ +1 & \text{se } e_j \in m_i - \text{versi concordi} \end{cases}$$

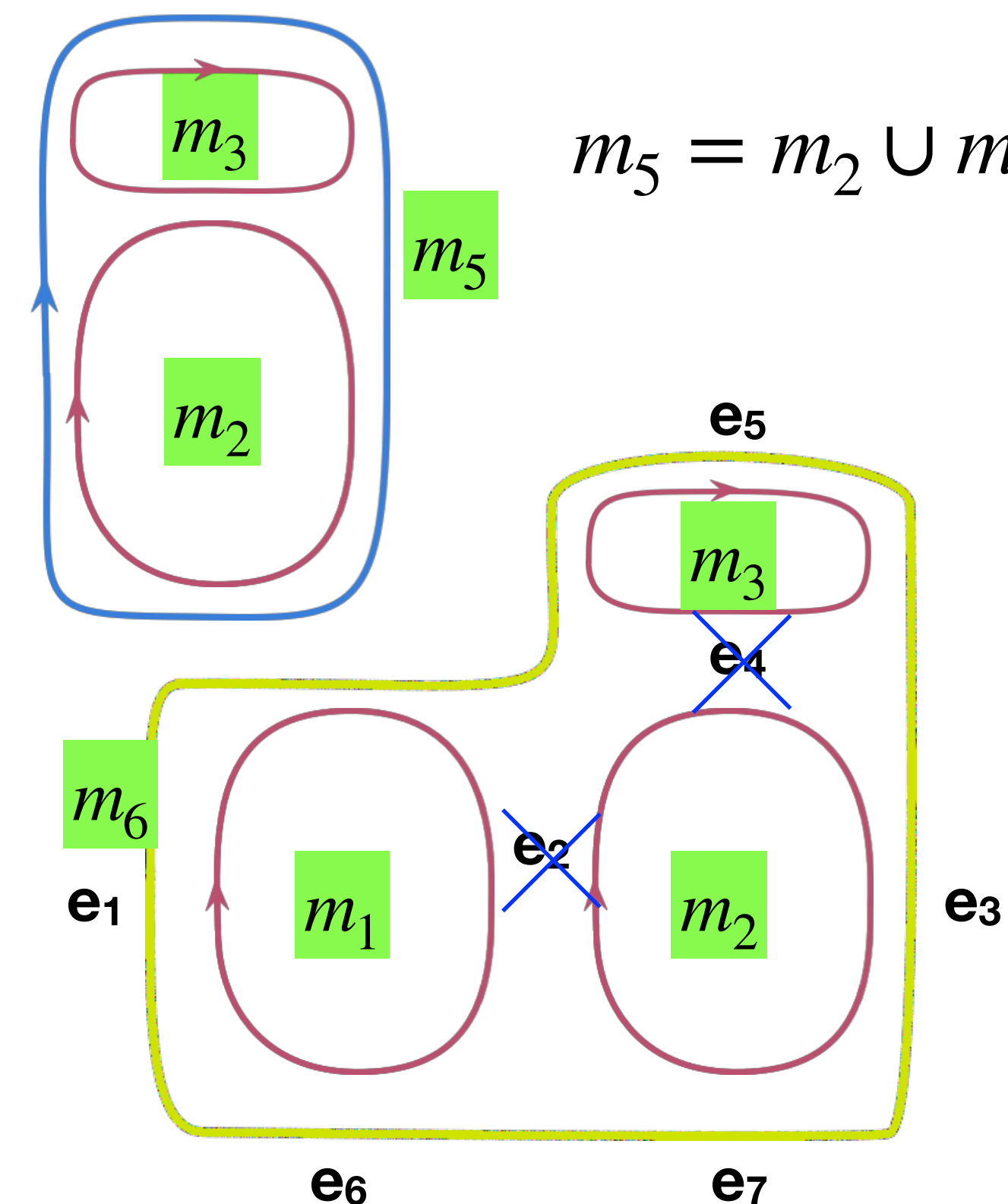
La definizione degli elementi della matrice **NON CAMBIA!**

Il Numero di maglie fondamentali è pari al numero di lati di co-albero $l - (n - 1)$



$$m_4 = m_1 \cup m_2$$

Ogni altra maglia è ottenibile come unione di maglie fondamentali



$$m_5 = m_2 \cup m_3$$

$$m_6 = m_1 \cup m_2 \cup m_3$$



TAGLI FONDAMENTALI DI UN GRAFO

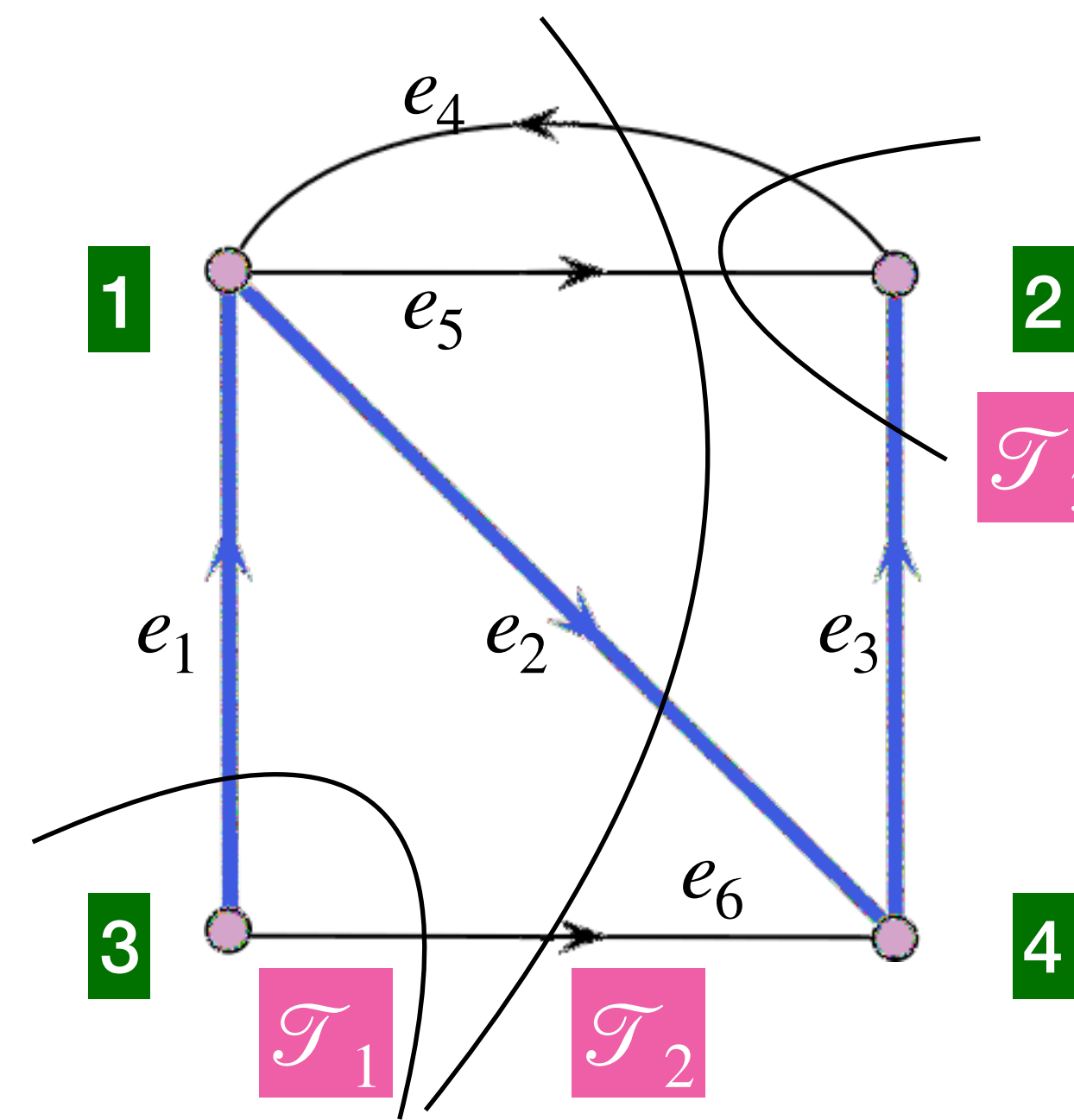
Si può mostrare che per ogni lato di albero è possibile costruire un taglio che lo contenga.

Esso viene definito come **TAGLIO FONDAMENTALE**.

MATRICE DI TAGLIO FONDAMENTALE

$$\tau_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } e_j \text{ entra in } S_i \\ 0 & \text{se } e_j \text{ non incide in } S_i \\ +1 & \text{se } e_j \text{ esce da } S_i \end{cases}$$

Il Numero di tagli fondamentali è pari al numero di lati di albero: $(n - 1)$



Nel grafo si può vedere che alcuni tagli coincidono con i lati che incidono in un nodo, mentre ad esempio il taglio $\mathcal{T}_2$ si ottiene come unione dei lati dei nodi 1 e 3.

In altri termini, le righe della matrice di maglia sono combinazioni lineari delle righe di A_r .

$\mathcal{T}_1$	1	0	0	0	0	1	-1	1	0	-1	1	0	1
$\mathcal{T}_2$	0	1	0	-1	1	1	0	0	-1	1	-1	0	2
$\mathcal{T}_3$	0	0	-1	1	-1	0	1	0	0	0	0	1	3

Le righe della matrice di taglio fondamentale sono INDIPENDENTI.



DIE
TI.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

FORMA SINTETICA DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Le equazioni di Kirchhoff alle correnti possono scriversi come segue:

$$\mathcal{A} i = 0$$

Dal momento che la matrice $\mathcal{A}$ non ha rango pieno, è possibile considerare la matrice di incidenza ridotta, ottenuta eliminando una riga della matrice di incidenza.

$$\mathcal{A}_r i = 0$$

Ma la matrice $\mathcal{A}_r$ ha rango pieno?

- Le righe di $\mathcal{T}$ sono combinazioni lineari di $\mathcal{A}_r$;
- Ogni riga di $\mathcal{T}$ ha un elemento diverso da zero non condiviso con le altre righe, cioè le righe di $\mathcal{T}$ sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI**;
- Pertanto anche la matrice $\mathcal{A}_r$ ha rango pieno.

Legge di Kirchhoff alle correnti - LKC

$$\mathcal{T} i = 0$$

Rappresenta $n - 1$ equazioni alle correnti linearmente indipendenti.

Possiamo concludere che il numero massimo di LKC L.I. è $n - 1$

Possiamo formulare quindi, come usuale, le LKC attraverso la matrice di incidenza ridotta.

In altri termini, per formulare le LKC basterà scrivere le equazioni alle correnti per $n - 1$ nodi della rete.



FORMA SINTETICA DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Le equazioni di Kirchhoff alle tensioni possono scriversi come segue:

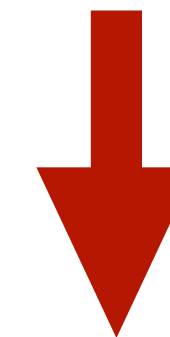
$$\mathcal{B} v = 0$$

Con $\mathcal{B}$ intendiamo la **MATRICE DI MAGLIA FONDAMENTALE**.

Ma la matrice $\mathcal{B}$ ha rango pieno?

- Ogni riga di $\mathcal{B}$ ha un elemento diverso da zero non condiviso con le altre righe, perché corrisponde al lato di co-albero che ha in esclusiva;
- Quindi le righe di $\mathcal{B}$ sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI**;
- Pertanto la matrice $\mathcal{B}$ ha rango pieno.

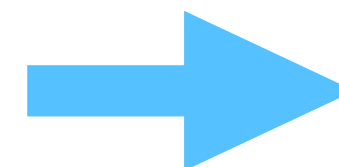
Poiché ogni altra maglia è unione di maglie fondamentali



ogni altra equazione alla maglia è una C.L. delle equazioni alle maglie fondamentali

Pertanto, possiamo concludere che il numero massimo di LKT L.I. è $l - (n - 1)$

Si potrebbe dimostrare che in un grafo planare il numero di anelli è pari a $l - (n - 1)$



In un grafo planare le LKT possono scriversi per gli $l - (n - 1)$ **ANELLI DEL GRAFO!**

